الوحدة 2: تطبيقات الاشتقاق

2A. التقريب

2A-1

أوجد التقريب الخطي لـ $\sqrt{a+bx}$ عند 0، باستعمال (2)، وأيضاً باستعمال الصيغة التقريبية الأساسية. (هنا a و b هما ثوابت؛ نفترض أنَّ $a>0$. لا تخلط هذه مع a في (2)، التي لها قيمة الـ0.)

2A-2

أعد التمرين A-1 من أجل الدالة $\frac{1}{a+bx}$، $a\neq 0$.

2A-3

أوجد التقريب الخطي عند 0 لـ $\frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x}$ باستعمال صيغ التقريب الأساسية، وأيضاً باستعمال (2).

2A-4

أوجد التقريب الخطي من أجل $h\approx 0$ لـ $w=\frac{gW}{(1+h/R)^2}$، حيث w هو وزن جسم عند الارتفاع h فوق سطح الأرض، و W هو الوزن عند سطح الأرض و R نصف قطر الأرض. (قم بهذا دون الرجوع إلى الملاحظات.)

2A-5

بالقيام بافتراض معقول، إذا كان شخص قامته 5 أقدام يزن حوالي 120 رطلاً، بالتقريب كم سيكون وزن شخص قامته $5'1''$؟

2A-6

أوجد التقريب التربيعي لـ $\tan\theta$، من أجل $\theta \approx 0$.

2A-17

أوجد التقريب التربيعي لـ $\dfrac{\sec x}{\sqrt{1-x^2}}$، من أجل $x \approx 0$.

2A-8

أوجد التقريب التربيعي لـ $1/(1-x)$، من أجل $x \approx 1/2$. (إما استعمل (13) أو ضع $x = \dfrac{1}{2} + h$ واستعمل التقريب الأساسي.)

***2A-9**

قم باستنتاج (12) جبرياً كما اقترحنا في الملاحظات.

2A-10

قم باستنتاج (9)، (10)، (12) باستعمال الصيغة (13).

2A-11

بالنسبة إلى غاز مثالي في درجة حرارة ثابتة، علاقة المتغيران p (الضغط) و v (الحجم) هي $pv^k = C$، حيث k و C ثابتان. إذا تغير الحجم قليلاً من v_0 إلى $v_0 + \Delta v$، ما هو التقريب التربيعي الذي ستستخدمه والذي يعبِّر عن p بدلالة Δv؟ (أوجد التقريب الصحيح من أجل $\Delta v \approx 0$.)

2A-12

أعط التقريب المشار إليه عند النقطة المشار إليها. (القيام بهذا يكون بعد دراسة دالة اللوغارتم log والدالة الأسية.)

$a)\ \dfrac{e^x}{1-x}$ (تربيع، $x\approx 0$) $b)\ \dfrac{\ln(1+x)}{xe^x}$ (خطي، $x\approx 0$)

$c)\ e^{-x^2}$ (تربيع، $x\approx 0$) $d)\ \ln\cos x$ (تربيع، $x\approx 0$)

$e)\ x\ln x$ (تربيع، $x\approx 0$) (تلميح: ضع $x=1+h$.)

2A-13

أوجد التقريب الخطي والتربيعي للدوال التالية:

$a)\ \sin(2x)$، بالقرب من 0 $b)\ \cos(2x)$، بالقرب من 0

$c)\ \sec(x)$، بالقرب من 0 $c)\ e^{x^2}$، بالقرب من 0

$e)\ 1/(a+bx)$، بالقرب من 0؛ بافتراض أنَّ $a\neq 0$؛

f) $1/(a+bx)$ بالقرب من 1، ماذا تفترض من أجل الثابتين a و b ؟

***2A-14**

افترض أنَّ قطعة علكة لها حجم يقدر بـ 4 سنتيمترات مكعبة.

$a)$ استعمل التقريب الخطي لحساب سمك القطعة إن كان لها نصف قطر داخلي قدره 10 سنتيمترات.

(ابدأ بالعلاقة بين الحجم V للكرة ونصف القطر r، واشتق العلاقة التقريبية بين ΔV و Δr.)

$b)$ أوجد الإجابة الدقيقة.

$c)$ إلى أي درجة (عدد الخانات الرقمية) يكون التقريب دقيقاً؟ بعبارة أخرى، أوجد درجة الفرق بين التقريب والإجابة الصحيحة. (كن متأكداً من استعمال عدة أرقام بعد الفاصلة لـ π لتعكس الدقة بشكل صحيح!)

d) استعمل التقريب التربيعي للصيغة الدقيقة من أجل السماكة التي أوجدتها في الجزء (b) للحصول على تقييم آخر أكثر دقة.

e) لماذا يكون الحد التربيعي قريباً من الخطأ في دقة التقريب الخطي؟

2A-15

أوجد التقريب الخطي والتربيعي لـ $\cos(3x)$ بالقرب من $x=0$، $\pi/6$ و $\pi/3$.

2A-16

a) استعمل قانون جيب التمام لإيجاد الصيغة $\sqrt{2-\cos(2\pi/n)}$ لطول ضلع لمضلع متساوي الأضلاع من الدرجة n موجود داخل دائرة الوحدة.

b) احسب المحيط ومن ثم احسب النهاية عندما يؤول n إلى مالانهاية باستعمال التقريب التربيعي لـ $\cos\theta$ بالقرب من $\theta=0$. (قارن بـ 1J-4.)

2B. التمثيل البياني للمنحنيات

2B-1

مثل بيانياً منحنيات ما يلي. أوجد المجال حيث يتزايد المنحنى ويتناقص، وحدد عدد الحلول عند $y=0$.
(لا يجب أن تعكس المنحنيات نقاط الانعطاف، التي تمت مناقشتها في 2-9)

$a)\ y=x^3-3x+1$

$b)\ y=x^4-4x+1$

$c)\ y'(x)=1(1+x^2)$ و $y(0)=0$.

$d)\ y=x^2/(x-1)$

$e)\ y=x/(x+4)$

$f)\ y=\sqrt{x+1}/(x-3)$

$g)\ y=3x^4-16x^3+18x^2+1$

$h)\ y=e^{-x^2}$

$i)\ y'=e^{-x^2}$ و $y(0)=0$.

2B-2

أوجد نقاط الانعطاف للمنحيات في المسألة 1.

2B-3

أوجد شروط a، b و c التي من أجلها تكون الدالة:

$$y=x^3+ax^2+bx+c$$

لها قيمة عظمى محلية وقيمة دنيا محلية. استعمل الطريقتين التاليتين:

$a)$ أوجد الشرط الذي من أجله y' يكون لها جذران حقيقيان. أي من هذين الجذرين هو عند القيمة العظمى وأيهما عند القيمة الدنيا؟ (ارسم.)

$b)$ أوجد الشرط الذي من أجله $y'<0$ عند نقطة الانعطاف. لماذا تتضمن هذه الخاصية وجود قيمة عظمى وقيمة دنيا محليتين؟

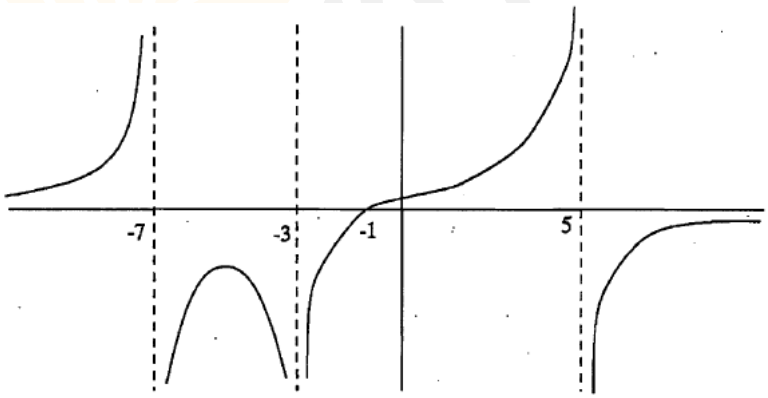
2B-4

نفترض أنَّ f هي دالة مستمرة على $0\le x\le 10$. ارسم المنحنى من التوضيحات التالية: f تساوي 0 عند 4، 7 و9. $f'(x)>0$ من أجل $0<x<5$ و $8<x<10$ و $f'(x)<0$ من أجل $5<x<8$. آخذاً بعين الاعتبار المعلومات المعطاة، هل يمكنك قول أي شيء مؤكد فيما يخص القيمة القصوى والقيمة الدنيا لـ f ؟ هل يمكنك قول أي شيء حول المكان الذي يكون فيه الحد الأقصى أو الحد الأدنى؟

2B-5

a) ارسم نسخة من المنحنى أدناه وارسم منحنى المشتق تحته مباشرة. اربط نقاط الانعطاف مع النقاط الموافقة لها في المنحنى الخاص بالمشتقة من خلال مستقيمات متقطعة عمودية.

b) أوجد الدالة النسبية التي لها منحنى يشبه المنحنى أدناه.



2B-6

a) أوجد كثير الحدود من الدرجة الثالثة والذي له قيمة عظمى عند $x=-1$ وقيمة دنيا عند $x=1$.

b) ارسم المنحنى عند $-3\le x\le 3$.

c) ارسم الدالة القابلة للاشتقاق من أجل $-3\le x\le 3$ التي تتمتع بقيمة عظمى مطلقة عند $x=-1$ وقيمة دنيا مطلقة عند $x=1$.

2B-7

a) برهن على أنَّه إذا كانت $f(x)$ متزايدة ولها مشتقة عند a، إذن $f'(a)\geq 0$. (يمكنك استعمال حقيقة أنَّ الدالة الموجبة لها نهاية ≥ 0.)

b) إذا تغيرت نتيجة الجزء (a) إلى : $f'(a)>0$ ، تصبح العبارة أعلاه خطأ. بين لماذا يفشل البرهان في الجزء (a) بإظهار أن $f'(a)>0$ ، وأعط مثالاً يثبت عدم صحة $f'(a)>0$ (مثال يكون العبارة من أجله خطأ).

c) أثبت أنه إذا كان لـ $f(x)$ حد أقصى نسبي a ولها مشتقة عند a، إذن $f'(a)=0$. (خذ بعين الاعتبار النهايتين على اليمين وعلى اليسار لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$؛ طبق فكرة الجزء (a).)

2C. مسائل الحد الأقصى والأدنى

2C-1

قص أربعة مربعات متطابقة من زوايا مربع كرتوني ذي الأبعاد 12 في 12 بوصة، وقم بطي الجوانب بحيث تحصل على علبة بدون غطاء علوي. أوجد قياس المربع المقصوص الذي يجعل حجم العلبة في حده الاقصى.

2C-2

مطلوب منك أن ترسم فناء مستطيل يضم 20,000 قدم مربعة مع سياج بثلاثة جوانب وجدار للإسطبل على ضلع الطول الرابع. أوجد أقصر طول للسياج المطلوب.

2C-3

ما هي القيمة الكبرى للجداء xy ، إذا كانت الغلاقة بين x و y هي $x+2y=a$ ، حيث a ثابت موجب؟

2C-4

خدمة البريد الأمريكية تقبل الطرود التي طولها + محيطها (حزامها) يساوي بالحد الأقصى 108 بوصة. ما هي أبعاد العلبة ذات الحجم الأكبر التي يمكن قبولها؟ ما هو حجمها (بالقدم المكعبة)؟

("الطول" هو الأكبر في الأبعاد الثلاثة للطرد و"المحيط" هو مجموع أطوال الجوانب الأربعة في الوجه العمودي على الطول، وهو مايسمى، قياس "حزام" العلبة. لاحظ أن الشكل الهندسي الأفضل لهذا الوجه المتعامد مع الطول هو شكل المربع.)

2C-5

أوجد نسبة أبعاد أسطوانة مفتوحة (على سبيل المثال بدون غطاء) لها حجم أعظمي، ومساحة سطح ثابتة A . (استعمل نصف القطر على أنه المتغير r .)

2C-6

ما هي القيم الكبرى والصغرى الممكنة الناتجة عن جداء ثلاثة أعداد مختلفة متباعدة بحيث أن العدد الأوسط x يبعد بمقدار 1 عن العددين الآخرين، إذا كان $-2 \leq x \leq 2$؟

2C-7

أوجد أبعاد المستطيل ذي المساحة الأكبر الذي يمكن رسمه بداخل نصف دائرة نصف قطرها a.

2C-8

أوجد أبعاد المستطيل ذي المساحة الأكبر داخل مثلث قائم، إذا كان:

a) جانبا المستطيل موازيان لساقي المثلث؛

b) جانباً واحداً من المستطيل موازٍ للوتر.

(بالنسبة للوضعين، أيهما يعطي مستطيلاً أكبر؟)

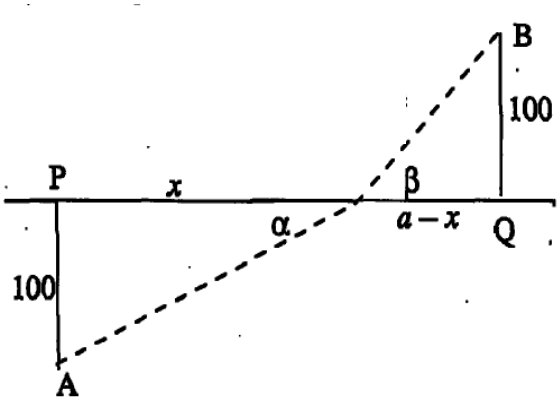
2C-9

الشعاع المنعكس على مرآة يقطع أقصر مسافة بين نقطة بداية الشعاع ونقطة نهايته.

نفترض أن الشعاع يبدأ عند $(0,1)$، وينتهي عند النقطة (a,b) داخل الربع الأول، وينعكس عندما يرتطم بالمحور x (عند النقطة $(x,0)$).

بين أنَّ القطعتين المشكلتين لمسار الشعاع تصنعان زاويتين متساويتين مع المحور x. أي، "زاوية الورود تساوي زاوية الانعكاس."

2C-10



سباح موجود على الشاطئ عند نقطة A. النقطة الأقرب له (A) على الشاطئ المستقيم تسمى P. هنالك منصة على الماء عند B، وأقرب نقطة على الشاطئ من B تسمى Q.

نفترض أن المسافة من A إلى P هي 100 متر، المسافة من B إلى Q هي 100 متر والمسافة من P إلى Q هي a متر. نفترض أنَّ السباح يمكن أن يجري بسرعة 5 أمتار في الثانية على الشاطئ ويسبح بسرعة 2 متر في الثانية في الماء.

بيّن أنَّ المسار الذي يجب أن يسلكه السباح للوصول إلى المنصة في أقل وقت ممكن له خاصية أنَّ النسبة بين جيوب الزوايا التي يصنعها المسار مع الشاطئ تكون موافقة للنسبة العكسية للسرعات في المنطقتين:

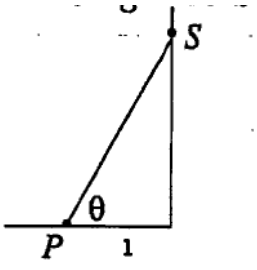
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{5}{2}$$

(في علم البصريات، معلوم عن هذا أنه قانون "سنيل"، وهو يوضح المسار الذي تأخذه أشعة الضوء المارة من خلال وسطين مختلفين. اكتشف "سنيل" تجريبياً أن نسبة الجيوب أعلاه كانت ثابتة، ولا تتعلق بنقطة البداية ولا النهاية للمسار. تبيّن هذه المسألة أنَّ قانون سنال ينبثق من مبدأ الحد الأدنى: تسلك الأشعة المسار الذي يقلل من زمن سيرها. النسبة بين الجيوب ثابتة بما أنها متعلقة فقط بسرعة الضوء في الوسطين.)

2C-11

شعاع بمقطع عرضي مستطيل يواجهه حاجز بمقطع عرضي دائري. قوة الشعاع S متناسبة مع المسافة الأفقية x للمستطيل ومع مكعب البعد العامودي y للمستطيل، $S=cxy^3$. أوجد النسبة y/x التي تعطى الشعاع الأقوى.

2C-12



أنت بصدد تركيب إضاءة خلف مكتبك. يضيء الضوء الواقع عند S النقطة P على السطح الأفقي للمكتب مع شدة متناسبة عكسياً مع مربع المسافة من P إلى S ومتناسبة مع جيب الزاوية بين الشعاع من P إلى S والسطح الأفقي. ثبت النقطة P على المكتب على بعد 1 قدم من الجدار. أوجد ارتفاع S فوق المكتب الذي من أجله تكون الشدة عند P هي الأكبر.

2C-13

a) تشغل شركة الطيران 100 مقعد في طائرتها بثمن 200$. لكل زيادة 5$ في الثمن، تخسر الشركة راكبين. ولكل تخفيض بـ 5$، تربح الشركة راكبين. ما هو السعر الذي يجعل العائدات في الحد الأقصى؟

b) لدى شركة مشغل توليد طاقة صغير يمكنه إنتاج x كيلوواط ساعي من الكهرباء يومياً بثمن مقداره $10\text{-}x/10^5$ سنتاً من أجل $0 \le x \le 8\times 10^5$. يستهلك المستهلك $10^5(10-p/2)$ كيلوات ساعي من الكهرباء يومياً بسعر p سنتاً للكيلوات الساعي. ما هو السعرالذي يجب فرضه من الشركة لتكون الأرباح في الحد الأقصى؟

2C-14

أوجد القيمة القصوى وموقعها للدوال التالية: (من أجل $a>0$، $x^a \ln x \to 0$ عندما $x \to 0^+$. يُستنتج هذا من 2G-8 أو من قاعدة لوبيتال في القسم 6A.)

a) $x^2 \ln(1/x)$، من أجل $x>0$

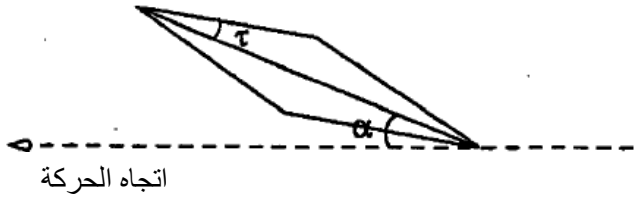
b) $-x\ln(2x)$، من أجل $x>0$

15-2C

أوجد أدنى قيمة لـ $(x+1)e^{-x}$، من أجل $0 \le x < \infty$.

2D. المزيد من المسائل حول الحد الأقصى والحد الأدنى

2D-1



نعتبر مقطع جناح طائرة نفاثة على شكل معين رفيع حيث يكون نصف الزاوية عند الانفتاح هو τ والزاوية مع اتجاه الحركة هي α. (الزاوية α هي الزاوية التي يصنعها القطر الأكبر للمعيَّن مع الجهة الأفقية لحركة الطائرة. انظر الشكل.) نسبة الرفع إلى السحب معطاة بالعلاقة:

$$\frac{\text{الرفع}}{\text{السحب}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \tau^2}$$

a) من أجل τ معطى وثابت، أوجد أفضل زاوية α، التي من أجلها تزيد نسبة الرفع إلى السحب.

b) أوجد الحد الأدنى للنسبة (أكبر قيمة سالبة). (يمكن أن تستعمل هذه النسبة في سيارات مجنحة مصممة من أجل تجاوز سرعة الصوت، وذلك لمنعها من الطيران.)

*2D-2

نعتبر كأساً ورقية بشكل مخروطي حصلنا عليها بتدوير القطعة المستقيمة $y = ax$ ، $0 \le x \le r$، حول المحور y. من أجل أي ميل $a \ge 0$ تستطيع الكأس استيعاب أكبر كمية من الماء، بافتراض أنَّ مساحة سطحها A تبقى ثابتة؟

(استعمل المعادلة: الحجم $V = \frac{1}{3}$ (مساحة القاعدة)(الارتفاع)؛ $A = \pi r^2 \sqrt{1+a^2}$.)

2D-3

كأس تحوي قهوة في درجة حرارة $y(t_0)$ عند اللحظة t_0 في غرفة درجة حرارتها a تبرد وفقاً للصيغة (المستنتجة من 3F-4)؛ نفترض أنَّ $a = 20°\text{C}$ و $c = 1/10$:

$$y(t) = (y(t_0) - a)e^{-c(t-t_0)} + a, \quad t \ge t_0$$

أنت بصدد إضافة الحليب بحيث يكون في الكأس 10% حليب و 90% قهوة. درجة حرارة القهوة T_1 والحليب T_2، ستكون درجة حرارة المزيج $\frac{9}{10}T_1+\frac{1}{10}T_2$.

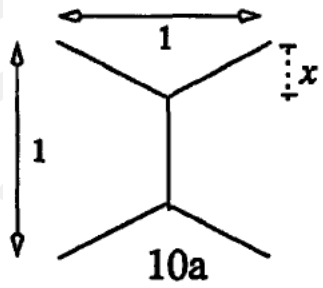
درجة حرارة القهوة هي 100°C في اللحظة $t=0$، وستشرب المزيج عند اللحظة $t=10$. بردَ الحليب إلى 5°C . ما هي اللحظة المناسبة لإضافة الحليب بحيث تكون القهوة بأعلى درجة حرارة عند تناولها؟

***2D-4**

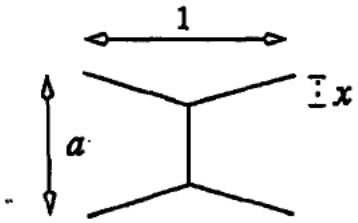
a) بيِّن أن المجموعة الأقصر من الطرق التي تربط أربع مدن عند الرؤوس الأربعة لمربع-طول ضلعه يساوي الواحد- تعطى بالطرق تلتقي بزوايا مقدارها 120°. استعمل المتغير x كما هو مبين في الشكل.

b) أوجد المجموعة الأقصر للطرق في الشكل الموضح للمدن الأربعة عند رؤوس المستطيل. أكتب صيغة طول الطرق كدالة لـ a.

تلميح: في بعض الأحيان تكون الإجابة أن الطرق تلتقي بزوايا 120°، لكن فقط من أجل قيم معينة لـ a .



10a



10b

***2D-5**

أوجد المثلث ذا المساحة الأصغر في منتصف المستوي إلى يمين المحور y الذي جوانبه الثلاثة على الترتيب: تقع على المحور x، تقع على القطر $y=x$، تقع على المستقيم المار من $(2,1)$.

***2D-6**

أوجد النقطة من القطع الناقص

$$73x^2-72xy+52y^2=2500$$

الأقرب من $(0,0)$.

تلميح: استعمل الاشتقاق الضمني لإيجاد المعادلة التربيعية من أجل x و y. يشكل هذا نوع من المعادلات (يعرف بالمعادلات المتجانسة) التي يمكن أن تواجهها في المسألة 2C-11. الشكل المتجانس يجعلها ممكنة الحل من أجل y/x . يمكنك عندها إيجاد (x,y) بالتعويض في المعادلة الأصلية.

2D-7

أوجد العددين الموجبين اللذين يكون الجداء بينهما 10 ومجموعهما أكبر ما يمكن.

2E. المعدلات ذات الصلة

2E-1

يتحرك روبوت بسرعة 20 ft/sec يمر تحت إنارة الشارع التي تقع على ارتفاع 30 قدماً فوق الأرض. إذا كان طول الروبوت 5 أقدام، بأي سرعة ستمر حافة ظله بعد ثانيتين من المرور تحت إنارة الشارع؟ ما هي سرعة زيادة طول الظل في تلك اللحظة؟

2E-2

منارة ضوئية على بعد 4 أميال بحرية عن الشاطئ (مقاسة عمودياً عن طول الشاطئ المستقيم) تدور 3 دورات في الدقيقة. ما هي سرعة الشعاع الضوئي التي يتحرك بها على الشاطئ عندما يصنع الشعاع زاوية قدرها $60°$ مع الشاطئ؟

2E-3

قاربان يبحران بسرعة 30 miles/hr، الأول يتجه إلى الشمال والثاني إلى الشرق. يقطع الثاني مسار الأول بعد 10 دقائق من اللحظة التي كان القارب الأول بها هناك. بأي معدل تزداد المسافة بينهما عندما يكون القارب الثاني 10 أميال بعيداً عن نقطة التقاطع؟

2E-4

تتدفق الرمال في كومة مخروطية بمعدل $12\ m^3$ في الدقيقة، بحيث أنَّ قطر قاعدة الكومة يبقى دائماً 3/2 من ارتفاعها. أوجد معدل زيادة الارتفاع عندما يكون ارتفاع الكومة $2\ m$.

2E-5

يبتعد شخص عن بكرة تسحب حبلاً معلقاً بها. يُمسك الحبل على ارتفاع 10 أقدام تحت البكرة. بفرض أن الوزن عند النهاية الأخرى للحبل يرتفع بمعدل 4 أقدام في الثانية الواحدة. بأي معدل يمشي الشخص عندما يكون على بعد 20 قدماً من أسفل البكرة.

2E-6

تمر طائرة على ارتفاع 2 miles مباشرة فوق باخرة. تتجه الطائرة إلى الشمال بسرعة 400 mph من دون أن تغير من ارتفاعها. تبحر الباخرة غرباً بسرعة 50 mph. ما هو معدل تزايد المسافة بينهما بعد ساعة واحدة؟

2E-7

يملأ حوض صغير بالماء بمعدل 1 متر مكعب في الثانية. للحوض مقطع عرضي على شكل شبه منحرف طول قاعدته الصغيرة نصف متر وبطول من متر واحد للجانبين المفتوحين نحو الخارج بزاوية 45° من القاعدة. طول الحوض هو 4 أمتار. ما هو المعدل الذي يرتفع به مستوى الماء h عندما يكون h نصف المتر؟

2E-8

تبحر سفينة شراعية شرقاً بسرعة 60 km/h وأخرى تبحر جنوباً بسرعة 50 km/h. تقطع السفينة الأبطأ مسار السفينة الأسرع في منتصف النهار حيث كانت السفينة الأسرع في ذلك الموقع قبل ساعة من ذلك. أوجد الزمن التي كانت فيها السفينتان عند المسافة الأقرب من بعضهما بعضاً.

2E-9

تنزلق فتاة إلى الأسفل على منزلق بشكل قطع زائد $y=(x-1)^2$ من أجل $0\le x\le 1$. . سرعتها العمودية هي $dy/dt=-y(1-y)$. أوجد سرعتها الأفقية dx/dt عندما تكون $y=1/2$.

2E-10

ينتشر الزيت على مقلاة بحيث يكون نصف قطره متناسباً مع $t^{1/2}$، حيث t يمثل الزمن اعتباراً من لحظة صب الزيت. أوجد معدل تغير dT/dt لسماكة الزيت T.

2F. تحديد الجذر؛ طريقة نيوتن

2F-1

a) مثل بيانياً الدالة $y=\cos x-x$. بيّن باستعمال y' أن هناك جذراً واحداً للدالة $\cos x=x$، وأعط الحدين الأعلى والأدنى للجذر.

b) استعمل طريقة نيوتن لإيجاد جذر بـ 3 أرقام بعد الفاصلة.

c) طريقة أخرى لإيجاد الجذر لـ $\cos x=x$ هي استعمال ما يسمى بطريقة النقطة المثبتة. بدءاً بالقيمة $z_1=1$، اضغط على زر جيب التمام لآلتك الحاسبة حتى تستقر الإجابة، أي $z_{n+1}=\cos z_n$. كم عدد التكرارات التي ستستعملها حتى تثبت الأرقام التسعة الأولى؟ ما هي الطريقة التي تتطلب أقل عدد من الخطوات؟

2F-2

مثل بيانياً الدالة

$$y=2x-4+\frac{1}{(x-1)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

بالتحديد، احسب عدد المرات التي تختفي فيها y. (كلمة "يختفي" تعني $y=0$، وليست $y\to\infty$. اسم آخر لقيم x الذي عندها تكون $y=0$ هو "جذور أو أصفار" y.) ناقش منطقياً، ارتكازاً على إشارة y'، على أن الجذور التي وجدتها يجب أن تكون حيث هي ولايمكن تواجد جذور أخرى. (على سبيل المثال، "يجب أن يكون بالضبط صفر واحد في المجال $(-\infty,-1)$ لأن...")

2F-3

أعد المسألة 2 من أجل $y=x^2+x^{-1}$

2F-4

المعادلة $x^5-x=x(x^2-1)(x^2+1)=0$ لها ثلاثة جذور، وهي $x=0,1,-1$. كم جذراً يوجد للمعادلة $x^5-x-1/2=0$ ؟

2F-5

a) أوجد القيمة الابتدائية لـ x_1 لجذر الدالة $x-x^3=0$ والتي من أجلها تعطي طريقة نيوتن قيمة غير محددة لـ x_2.

b) أوجد القيمة الابتدائية لـ x_1 لجذر الدالة $x-x^3=0$ والتي من أجلها تتذبذب طريقة نيوتن جيئة وذهاباً بين قيمتين وإلى الأبد. تلميح: استعمل التناظر.

c) أوجد أكبر مجال حول كل جذر لـ $x-x^3=0$ بحيث تتقارب طريقة نيوتن إلى هذا الجذر لكل قيمة ابتدائية x_1 في ذلك المجال. تلميح: الجزء (a) و (b) ممكن أن يساعداك.

2F-6

a) نفترض أن شركة تصنع أكواباً أسطوانية (بسماكة متجانسة في القاعدة والجوانب) على استعداد لأن تستخدم ما يصل إلى 10% أكثر من الحد الأدنى من الزجاج لاستيعاب حجم محدد. ما هي النسب المسموح بها؟ (أنت بحاجة لاستعمال طريقة نيوتن.)

b) ما هي العلاقة مع المسألة 2C-5؟

2F-7

أوجد النقطة على المنحنى $y=\cos x$ الأقرب من المبدأ. (قلل من مربع المسافة إلى المبدأ؛ برهن على أنك وجدت كل النقاط الحرجة.)

2G. نظرية القيمة المتوسطة

2G-1

من أجل الدوال التالية، في المجال الموضح، أوجد تحديداً النقطة c التي يمكن أن نتنبأ بوجودها باستخدام نظرية القيمة المتوسطة؛ إذا كان هنالك أكثر من c، أوجد الكل. استعمل العلاقة (1).

(a) x^2 في $[0,1]$ $\quad$ (b) $\ln x$ في $[1,2]$ $\quad$ (c) x^3-x في $[-2,2]$

2G-2

باستعمال العلاقة (2)، بين أنَّ:

(a) $\sin x < x$، إذا كانت $x>0$ $\quad$ (b) $\sqrt{1+x}<1+x/2$، إذا كانت $x>0$

2G-3

طريق رئيسي طوله 121 ميلاً. دخلت سيارة رباعية الدفع من مدخل بوسطن ظهراً وخرجت من النهاية الغربية عند 1:50. بيّن أنَّه عند لحظة معينة خلال الرحلة كانت السيارة تسرع (على سبيل المثال أكثر من 65 ميلاً في الساعة المسموح به).

2G-4

كثير حدود $p(x)$ ذو درجة n له على الأكثر n جذر حقيقي مختلف، لكن يمكن أن يكون العدد أقل -على سبيل المثال x^2+1 ليس له جذر حقيقي أبداً. بيّن أنَّه إذا كان لـ$p(x)$ n جذراً حقيقياً مختلفاً، إذن $p'(x)$ له $n-1$ جذر حقيقي مختلف.

2G-5

a)نفترض أنَّ $f''(x)$ معرّف في المجال I و$f(x)$ لها جذور عند ثلاث نقاط مختلفة $a<b<c$ في المجال I. بين أنَّ هنالك نقطة p على $[a,c]$ حيث $f''(p)=0$.

b) وضح الجزء (a) على الدالة من الدرجة الثالثة $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

2G-6

باستعمال العلاقة (2) لنظرية القيمة المتوسطة، بين أنه على المجال $[a,b]$،

a) $f(x)$ تتزايد $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ b) $f(x)$ ثابتة $\Rightarrow$ $f'(x)=0$

*** 2G-7**

فيما يلي، استعمل الاستنتاجات لنظرية القيمة المتوسطة:

إذا كانت $f(a)\geq g(a)$ و $f'(x)>g'(x)$ من أجل كل $x>a$، إذن $f(x)>g(x)$ من أجل كل $x>a$.

a) ابدأ بـ $e^x>0$، بيّن أنه من أجل كل قيم x حيث $x>0$، يكون لدينا $e^x>1$.

b) استعمل الطريقة نفسها كما في الجزء (a) لتبين أن $e^x>1+x$، ومن هذا استنتج أنَّ $e^x>1+x+x^2/2$.

ملاحظة: يمكن لهذه الآلية أن تستمر. في النهاية تؤدي إلى السلسلة غير المتناهية التي تمثل e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

يمكن أن تستعمل النهاية غير المنتهية تلك لتمثيل e^x، وهي طريقة جيدة لحسابها بدقة جيدة.

c) بين أنه من أجل كل عدد $n>0$

$nx^{1/n}<\ln x$ من أجل $x>1$

***2G-8**

يمكن استعمال المبدأ نفسه مثل الذي في 2G-7 إذا كانت $x<a$:

إذا كانت $f(a)\geq g(a)$ و $f'(x)<g'(x)$ من أجل $x<a$، إذن $f(x)>g(x)$ من أجل $x<a$.

(لماذا انعكست جهة عدم التساوي عندما $x<a$؟ ارسم المنحنى لرؤية هذا.)

استعمل هذا المبدأ من أجل $f(x)=\ln(x)$ و $a=1$ لتبيِّن أنَّ:

$\ln x>-nx^{-1/n}$ من أجل $0<x<1$، $n>0$.

2. حل مسائل تطبيقات المشتق

2A. التقريبات

2A-1

من الصيغة $f(x)\approx\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}x$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\sqrt{a+bx}=\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$.

جبرياً: $\sqrt{a+bx}=\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{bx}{a}}\approx\sqrt{a}\left(1+\frac{bx}{2a}\right)$ ، مثلما سبق.

2A-2

$D\left(\frac{1}{a+bx}\right)=\frac{-b}{(a+bx)^2}\Rightarrow f(x)\approx\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}x$ ؛ أو $\frac{1}{a+bx}=\frac{1/a}{1/b/ax}\approx\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}x\right)$.

2A-3

$D\left(\frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x}\right)=\frac{(1+2x)\cdot\frac{3}{2}\cdot(1+x)^{3/2}-(1+x)^{3/2}\cdot 2}{(1+2x)^2}$ $\Rightarrow$ $f'(0)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x)\approx 1-\frac{1}{2}x$

أو بواسطة الجبر، $\frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x}\approx\left(1+\frac{3}{2}x\right)(1-2x)\approx 1-\frac{1}{2}x$.

2A-4

ضع $\varepsilon=\frac{h}{R}$ ؛

عندها $w=\frac{g}{(1+\varepsilon)^2}\approx g(1-\varepsilon)^2\approx g(1-2\varepsilon)=g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$.

2A-5

الافتراض المنطقي هو أنَّ w متناسبة مع الحجم v، الذي بدوره متناسب مع مكعب البعد الخطي، على سبيل المثال يبقى شخص ما هو نفسه بعد تغيير طفيف في وزنه.

إذن $w=Ch^3$؛ بما أنَّ 5 أقدام $=60$ بوصة، فإننا نحصل على

$$\frac{w(60+\varepsilon)}{w(60)}=\frac{C(60+\varepsilon)^3}{C(60)^3}=\left(1+\frac{\varepsilon}{60}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad w(60+\varepsilon)\approx w(60)\cdot\left(1+\frac{3\varepsilon}{60}\right)\approx 120\cdot\left(1+\frac{1}{20}\right)\approx 126$$

أو يمكنك حساب خطية $w(h)$ حول $h=60$ باستعمال المشتقات، واستعمال قيمة $w(60)$ لتحديد C. لتحصل على $w(h)\approx 1206(h-60)$

2A-6

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\approx\frac{\theta}{1-\theta^2/2}\approx\theta\left(1+\theta^2/2\right)\approx\theta$$

2A-7

$$\frac{\sec x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\cos x\sqrt{1-x^2}}\approx\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}\approx\frac{1}{1-x^2}\approx 1+x^2$$

2A-8

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\Delta x}=\frac{2}{1-2\Delta x}$$

$$\approx 2\left(1+2\Delta x+4(\Delta x)^2\right)\approx 2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)+8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

2A-10

$y=(1+x)^r$ ،

$y'=r(1+x)^{r-1}$ ،

$y''=r(r-1)(1+x)^{r-2}$

و بالتالي فإن $y(0)=1$ ، $y'(0)=r$ ، $y''(0)=r(r-1)$ ،

يعطي: $(1+x)^r \approx 1+rx+\frac{r(r-1)}{2}x^2$.

2A-11

$$pv^k=c \quad \Rightarrow \quad pcv^{-k}=c((v_0+\Delta v))^{-k}=cv_0{}^{-k}\left(1+\frac{\Delta v}{v_0}\right)^{-k}$$

$$\approx \frac{c}{v_0{}^k}\left(1-k\frac{\Delta v}{v_0}+\frac{k(k+1)}{2}\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right)$$

2A-12

(a $\frac{e^x}{1-x}\approx\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)(1+x+x^2)\approx 1+2x+\frac{5}{2}x^2$

(b $\frac{\ln(1+x)}{xe^x}\approx\frac{x}{x(1+x)}\approx 1-x$

(c $e^{-x^2}\approx 1-x^2$ (بالتعويض في $e^x\approx 1+x$)

(d $\ln(\cos x)\approx\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\approx-\frac{x^2}{2}$ (بما أنَّ $\ln(1+h)\approx h$)

(e

$$x\ln x=(1+h)\ln(1+h)\approx(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}\right)\approx h+\frac{h^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x\ln x\approx(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}$$

2A-13

إيجاد التقريب الخطي والتربيعي

a) $2x$ (لكل من الخطي والتربيعي)

b) 1، $1-2x^2$

c) 1، $1+x^2/2$ (استعمل $(1+u)^{-1}\approx 1-u$ مع $u=x^2/2$):

$$\sec x = 1/\cos x \approx 1/(1-x^2/2) = (1-x^2/2)^{-1} \approx 1+x^2/2$$

d) 1، $1+x^2$

e) استعمل $(1+u)^{-1}\approx 1-u+u^2$:

$$(a+bx)^{-1} = a^{-1}(1+(bx/a))^{-1} \approx a^{-1}\left(1-bx/a+(bx/a)^2\right)$$

التقريب الخطي: $(1/a)-(b/a^2)x$

التقريب التربيعي: $(1/a)-(b/a^2)x+(b^2/a^3)x^2$

f) $f(x)=1/(a+bx)$ بحيث $f'(1)=-b(a+b)^{-2}$ و $f''(1)=2b^2(a+b)^{-3}$. نحن بحاجة إلى افتراض أن هذه الأعداد معرّفة، بكلمات أخرى أنَّ $a+b\neq 0$. إذن يكون التقريب الخطي

$$1/(a+b)-(b/(a+b)^2)(x-1)$$

و يكون التقريب التربيعي

$$1/(a+b)-(b/(a+b)^2)(x-1)+(b/(a+b)^3)(x-1)^2$$

<u>الطريقة 2:</u>

$$1/(a+bx)=1/(a+b+b(x-1))$$

ثم استعمل نشر الدالة (e) مع $a+b$ في مكان a و b في مكان b و $(x-1)$ في مكان x. الشرط $a\neq 0$ في (e) يتوافق مع الشرط $a+b\neq 0$ في (f).

2A-15

$f(x)=\cos(3x)$ ،

$f'(x)=-3\sin(3x)$ ،

$f''(x)=-9\cos(3x)$.

عندئذ:

$f(0)=1$ ، $f(\pi/6)=\cos(\pi/2)=0$ ، $f(\pi/3)=\cos\pi=-1$

$f'(0)=-3\sin 0=0$ ، $f'(\pi/6)=-3\sin(\pi/2)=-3$ ، $f'(\pi/3)=-3\sin\pi=0$

$f''(0)=-9$ ، $f''(\pi/6)=0$ ، $f''(\pi/3)=9$

باستعمال هذه القيم، يكون التقريبان الخطي والتربيعي على الترتيب

بالنسبة إلى $x\approx 0$: $f(x)\approx 1$ و $f(x)\approx 1-(9/2)x^2$

بالنسبة إلى $x\approx \pi/6$: كلاهما $f(x)\approx -3(x-\pi/6)$

بالنسبة إلى $x\approx \pi/3$: $f(x)\approx -1$ و $f(x)\approx 1+(9/2)(x-\pi/3)^2$

2A-16

a) قانون جيب التمام يقول إنه بالنسبة إلى المثلث ذي الأضلع a ، b و c ، مع θ مقابلة للضلع ذي الطول c ، يكون لدينا:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

نطبق ذلك على أحد المثلثات التي عددها n ورأسه عند المبدأ: $a=b=1$ و $\theta=2\pi/n$. بحيث تكون الصيغة

$$c=\sqrt{2-2\cos(2\pi/n)}$$

b) المحيط هو $n\sqrt{2-2\cos(2\pi/n)}$. التقريب التربيعي لـ $\cos\theta$ بالقرب من 0 هي

$$\cos\theta\approx 1-\theta^2/2$$

وبالتالي، فإنه عندما $n\to\infty$ و $\theta=2\pi/n\to 0$ ،

بكلمات أخرى

$= n\sqrt{2-2(1-(1/2)(2\pi/n)^2} = n\sqrt{2-2\cos(2\pi/n)}$ $n\sqrt{(2\pi/n)^2}$ =n(2π/n)= 2π

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{2-2\cos(2\pi/n)} = 2\pi$$

محيط دائرة نصف قطرها 1.

2B. رسم المنحنيات

2B-1

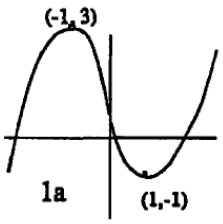
$(a$ $y = x^3 - 3x + 1$،

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$.

قيم النهايات: $y \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، و $y \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

القيم الحرجة: $y(-1) = 3$، $y(1) = -1$.



تتزايد عند: $-\infty < x < -1$، $1 < x < \infty$.

تتناقص عند: $-1 < x < 1$.

المنحنى: $(-\infty,-\infty)$ ↖ $(-1,3)$ ↙ $(1,-1)$ ↖ (∞,∞)،

قاطعاً المحور x ثلاث مرات.

$(b$ $y = x^4 - 4x + 1$، $y' = x^3 - 4$.

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4^{1/3}$.

يتزايد عند: $4^{1/3} < x < \infty$

يتناقص عند: $-\infty < x < 4^{1/3}$

قيم النهايات: $y \to \infty$ عندما $x \to \pm\infty$؛

القيم الحرجة: $y(4^{1/3}) = 1$.

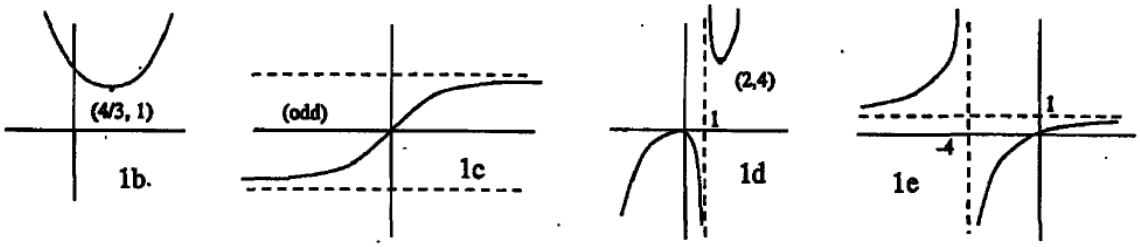
المنحنى: $(-\infty,\infty)$ ↙ $(4^{1/3},1)$ ↖ (∞,∞)، لن تقطع المحور x. (أنظر الشكل أدناه.)

$(c$ $y'(x) = 1/(1+x^2)$ و $y(0) = 0$.

بالتحقق، $y' > 0$ من أجل كل قيم x، بحيث تكون دائماً متزايدة.

قيم النهايات: $y \to c$ عندما $x \to \infty$ وعن طريق التناظر $y \to -c$ عندما $x \to -\infty$. (لكنه من غير الواضح عند هذه النقطة من المساق إن كان $c = \infty$ أو أية قيمة محددة. سنرى فيما بعد (المحاضرة 26) أن $y \to c = \pi/2$.

المنحنى: $(-\infty,-c) \nwarrow (\infty,c)$ يقطع محور x عند x=0 انظر الشكل أدناه.



(d) $y = x^2/(x-1)$،

$y' = (2x(x-1)-x^2)/(x-1)^2 = (x^2-2x)/(x-1)^2 = (x-2)x/(x-1)^2$.

قيم النهايات: $y \to \infty$ عندما $x \to \infty$ و $y \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$.

القيم المفردة: $y(1^+) = +\infty$ و $y(1^-) = -\infty$.

القيم الحرجة: $y(0) = 0$ و $y(2) = 4$.

<u>ميزة جديدة</u>: انتبه لتغيرات الإشارة في المقام لـ y'.

تتزايد في: $-\infty < x < 0$ و $2 < x < \infty$

تتناقص في: $0 < x < 1$ و $1 < x < 2$

المنحنى: $(-\infty,-\infty) \nwarrow (0,0) \swarrow (1,-\infty) \uparrow (1,\infty) \swarrow (2,4) \nwarrow (\infty,\infty)$، يقطع المحور x مرة واحدة عند $(x = 0)$.

<u>تعليقات حول القيم المفردة</u>: تَفَحَّص تغيرات الإشارة من أجل كلٍ من $y' = 0$ و y' غير معرف:

$y'=0$ يدل على إمكانية تغير الإشارة في البسط، و y' غير معرفة تعني أيضاً تغييراً في الإشارة في المقام . في حالتنا ما من تغير للإشارة في y' عند $x=1$، لكن سيكون هناك تغيراً في الإشارة، إذا كان هنالك أس فردية للدالة $(x-1)$ في المقام.

(e) $y=x/(x+4)$،

$y'=((x+4)-x)/(x+4)^2=4/(x+4)^2$. لا وجود لنقاط حرجة.

قيم النهايات: $y\to 2$ عندما $x\to\pm\infty$.

تتزايد في: $-4<x<\infty$.

تتناقص في: $-\infty<x<-4$.

القيم المفردة: $y(-4^+)=-\infty$ ، $y(-4^-)=+\infty$.

المنحنى $(-\infty,1)$ ↖ $(-4,-\infty)$ ↓ $(-4,\infty)$ ↖ $(\infty,1)$، تقطع المحور x مرة واحدة (عند $x=0$).

(f) $y=\sqrt{x+1}/(x-3)$،

$y'=-(1/2)(x+5)(x+1)^{-1/2}(x-3)^{-2}$ لا وجود لنقاط حرجة لأن $x=-5$ موجودة خارج مجال التعريف، $x\geq -1$.

قيم النهايات: $y(-1)=0$ ، وعندما $x\to\infty$ ،

$$y=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}\to\frac{1}{\infty}=0$$

القيم المفردة: $y(3^+)=+\infty$ ، $y(3^-)=-\infty$.

لاتتزايد في أي مكان.

تتناقص في: $-1<x<3$ و $3<x<\infty$.

المنحنى $(-1,0)$ ↙ $(3,-\infty)$ ↑ $(3,\infty)$ ↙ $(\infty,0)$، يقطع المحور x مرة واحدة (عند $x=-1$).

$g)$ $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 1$ ،

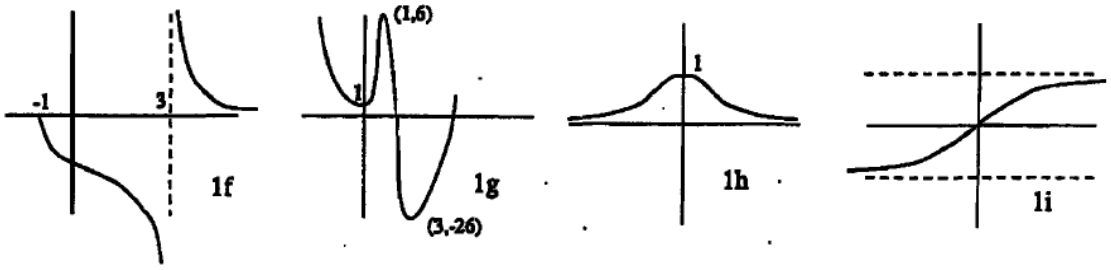
$y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x-1)(x-3)$.

$y' = 0 \Leftarrow x = 0,1,3$

قيم النهايات: $y \to \infty$ عندما $x \to \pm\infty$.

القيم الحرجة: $y(0) = 1$ ، $y(1) = 6$ ، و $y(3) = -188$.

تتزايد عند: $0 < x < 1$ و $3 < x < \infty$



تتناقص عند: $-\infty < x < 0$ و $1 < x < 3$.

المنحنى: $(-\infty,\infty)$ ↙ $(0,1)$ ↖ $(1,6)$ ↙ $(3,-188)$ ↖ (∞,∞)

$h)$ $y = e^{-x^2}$ ،

$y' = -2xe^{-x^2}$.

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$.

قيم النهايات: $y \to 0$ عندما $x \to \pm\infty$.

القيم المفردة: $y(0) = 1$.

تتزايد في: $-\infty < x < 0$

تتناقص في $0 < x < \infty$

المنحنى: $(-\infty,0)$ ↖ $(0,1)$ ↙ $(\infty,0)$، لن تقطع المحور x. (الدالة زوجية.)

$i)$ $y'=e^{-x^2}$ و $y(0)=0$.

بما أنَّ y' زوجية و $y(0)=0$ فإن y فردية. ولا وجود لقيم حرجة.

قيم النهايات: $y\to c$ عندما $x\to\infty$ وبالتناظر $y\to -c$ عندما $x\to-\infty$. من غير الواضح عند هذه النقطة من المساق هل قيمة c منتهية أو غير منهية. لكننا سنكون قادرين أن نبين أنَّ قيمة c منتهية عندما نناقش التكاملات المعتلة في الوحدة 6. (باستعمال حيلة التكاملات التكرارية، أحد مواضيع مساق التفاضل والتكامل لعدة متحولات (18.02) ، يمكن للمرء أن يبين أنَّ $c=\sqrt{\pi/2}$.)

المنحنى: $(-\infty,-c)$ ↖ (∞,c)، يقطع المحور x مرة واحدة (عند $x=0$).

2B-2

$a)$ نقطة انعطاف واحدة عند $x=0$. $(y''=6x)$

$b)$ ما من نقاط انعطاف. $y''=3x^2$، إذاً الدالة مقعرة. $x=0$ ليس نقطة انعطاف لأن $y''>0$ من الجهتين كليهما لـ $x=0$.

$c)$ نقطة الانعطاف عند $x=0$. $\left(y''=-2x/(1+x^2)^2\right)$

$d)$ لا وجود لنقاط انعطاف. السبب: $y''=2(x-1)^3$. لذا $y''>0$ والدالة محدبة إلى الأعلى عندما $x>1$، و $y''<0$ والدالة مقعرة من الأسفل عندما $x<1$. لكن $x=1$ لا تسمى نقطة انعطاف لأن الدالة غير مستمرة هناك. في الواقع، $x=1$ هي نقطة مفردة.

$e)$ لا وجود لنقاط انعطاف. $y''=-8/(x+1)^3$. كما في الجزء (d) هنالك تغير الإشارة في y''، لكن النقطة المفردة ليست بنقطة انعطاف.

$$y'' = -(1/2)[(x+1)(x-3)-(1/2)(x+5)(x-3)-2(x+5)(x+1)](x+1)^{-3/2}(x-3)^3 \quad (f$$
$$= -(1/2)[-(3/2)x^2 - 15x - 11/2](x-1)^{-3/2}(x-3)^3$$

وبالتالي فإن هناك نقطي انعطاف، $x = \left(-30 \pm \sqrt{768}\right)/6 \approx 9.6,.38.$

$y'' = 12(3x^2 - 8x + 36)$ (g . وبالتالي لا وجود لنقاط انعطاف. المعادلة التربيعية ليس لها جذور حقيقية.

$y'' = \left(-2 + 4x^2\right)e^{-x^2}$ (h . وبالتالي فإنه يوجد نقطتا انعطاف عند $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

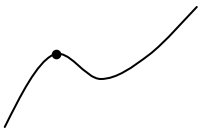
i) نقطة انعطاف واحدة عند $x = 0$. $\left(y'' = -2xe^{-x^2}\right)$.

2B-3

a) $y' = 3x^2 + 2ax + b$. جذور كثير الحدود من الدرجة الثانية هي عبارة عن أعداد حقيقية مختلفة إذا كان مميز الدالة موجباً.

(*المميز* معرّف على أنه العدد تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية: √b2-4ac.) وبالتالي فإنه يوجد جذور حقيقية وفقط إذا:

$(2a)^2 - 4(3)b > 0$، أو $a^2 - 3b > 0$.



حيث أن $y << -1$ عندما $x << -1$ و $y >> 1$ عندما $x >> 1$، فإن الحد الأقصى المحلي هو على يسار الأدنى المحلي

من الشكل، بما أنَّ $y \to \infty$ عندما $x \to \infty$ و $y \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، يجب على الجذر الأكبر لـ $3x^2 + 2a + b = 0$ (ذي الإشارة الموجبة في الصيغة التربيعية) أن يكون حداً أدنى محلياً، ويكون الجذر الأصغر حداً أعلى محلياً.

b) $y'' = 6x + 2a$، إذاً نقطة الانعطاف عند $-a/3$. لذلك فإن الشرط $y' < 0$ عند نقطة الانعطاف هو

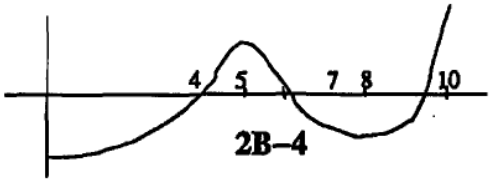
$$y'(-a/3) = 3(-a/3) + 2a(-a/3) + b = -a^2/3 + b < 0$$

أي:

$$a^2 - 3b > 0$$

إذا كانت $y' < 0$ عند نقطة معينة x_0، فإن الدالة تتناقص عند تلك النقطة. لكن $y \to \infty$ عندما $x \to \infty$، إذاً لا بد من وجود حد أدنى محلي عند النقطة $x > x_0$. بالمثل، بما أنَّ $y = -\infty$ عندما $x \to -\infty$، فلا بد من وجود حد أقصى عند النقطة $x < x_0$.

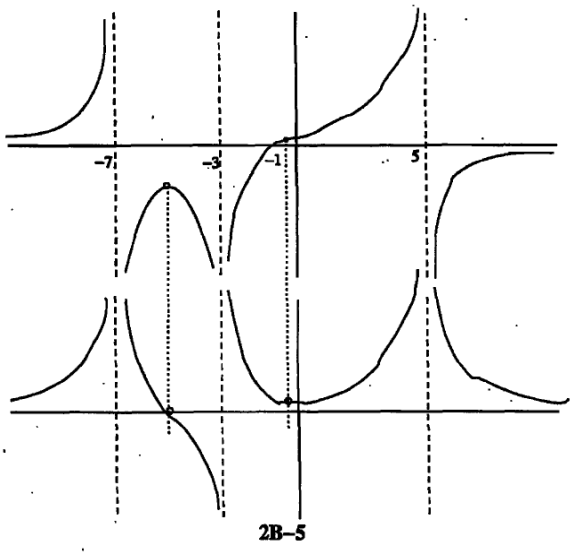
تعليق: نقوم بحساب y' عند نقطة الانعطاف لـ y $(x = -a/3)$ حيث إننا نحاول تقرير (ارجع إلى الجزء (b)) ما إذا كانت y' سالبة في أي نقطة. للقيام بهذا، نقوم بإيجاد الحد الأدنى لـ y' (الذي يكون من أجل $y'' = 0$).



الحد الأقصى عند $x = 5$ أو $x = 10$

الحد الأدنى عند $x = 0$ أو $x = 8$

منحنى الدالة



منحنى المشتقة؛ لاحظ أن الحد الأقصى أعلاه يوافق الصفر أدناه؛ نقطة الانعطاف أعلاه توافق الحد الأدنى أدناه

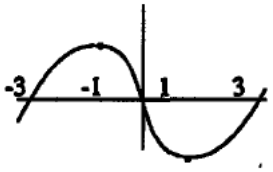
2B-6

a) جرِّب $y'=(x+1)(x-1)=x^2-1$. ثم $y=x^3/3-x+c$. الثابت c لا يهم، إذن اجعل $c=0$. من الملائم أيضاً الضرب بـ 3:

$$y=x^3-3x$$

b) هذه دالة فردية مع حد أدنى محلي وحد أقصى محلي: $y(1)=-2$ و $y(-1)=2$. قيم النهايات هي $y(3)=18$ و $y(-3)=-18$.

هي حادة جداً: $y'(3)=8$.



2B-7

a) $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\geq 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

إذا تزايدت y فإن $\begin{cases}\Delta y>0\Rightarrow\Delta x>0\\ \Delta y<0\Rightarrow\Delta x<0\end{cases}$ بحيث أنه في الحالتين كلتيهما $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$.

و بالتالي فإن، $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$.

b) برهن على الفشل في الخطوة الأخيرة. أي $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ لا تستلزم $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$

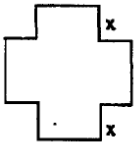
(النهايات لا تحافظ على عدم المساواة الصارمة، إلا الضعيفة منها. على سبيل المثال، $u^2>0$ بالنسبة إلى $u\neq 0$، لكن $\lim\limits_{u\to 0}u^2=0\geq 0$، وليس أكبر من الصفر.)

مثال مضاد: $f(x)=x^3$ متزايدة من أجل كل قيم x، لكن $f'(0)=0$.

c) استعمل $f(x) \geq f(a)$ لملاحظة أنَّ $\lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y / \Delta y \leq 0$ و $\lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y / \Delta y \geq 0$. ما دامت النهايتان اليمنى واليسرى متساويتين، فإنه يجب على المشتقة أن تساوي الصفر.

2C. مسائل حول الحد الأقصى الحد الأدنى

2C-1



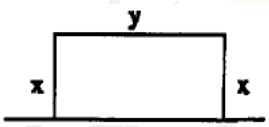
طول ضلع قاعدة علبة هو $12-2x$ وارتفاعها x، بحيث يكون حجمها $V=x(12-2x)^2$.

عند النهاية $x=0$ و $x=6$، يكون الحجم 0، بحيث يجب على الحد ألأقصى أن يكون في مكان ما بين تلك القيميتين عند النقطة الحرجة.

$$V'=(12-2x)^2+x(2)(12-2x)(-2)=(12-2x)(12-2x-4x)=(12-2x)(12-6x)$$

نستنتج من هذا أنَّ $V'=0$ عندما $x=6$ أو $x=2$. عند النهايات $x=0$ و $x=6$ يكون الحجم 0، إذاً يحدث الحد الأقصى عندما $x=2$.

2C-2



نريد الحد الأدنى من طول السياج $L=2x+y$، حيث المتغيران x و y متعلقان ببعضهما بعضاً بالعلاقة $xy=A=20{,}000$.

باختيار x كمتغير المستقل، يكون لدينا $y=A/x$، بحيث $L=2x+A/x$. عند النهايات $x=0$ و $x=\infty$ (إسطبل كبير)، نحصل على $L=\infty$، إذن يجب أن يكون الحد الأدنى لـ L عند النقطة الحرجة.

$$L=0\Rightarrow x^2=\frac{A}{2}=10{,}000\Rightarrow x=100\text{ feet}\quad ;\ L'=2-\frac{A}{x^2}$$

2C-3

لدينا $y=(a-x)/2$، بحيث $xy=x(a-x)/2$. عند النهايات $x=0$ و $x=a$، يكون الجداء xy معدوماً (وما بعد هذه القيم يكون سالباً). وبالتالي فإن الحد الأقصى يحدث عند النقطة الحرجة. بأخذ المشتقة،

$$\frac{d}{dx}\frac{x(a-a)}{2}=\frac{a-2x}{2}$$

يمثل هذا 0 عندما $x=a/2$.

2C-4

إذا كان الطول y والمقطع العرضي مربع والضلع x، فإن $4x+y=108$ وبالتالي فإن الحجم هو $V=x^2y=108x^2-4x^3$. إيجاد النقاط الحرجة:

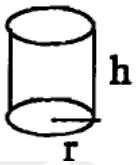
$$\left(108x^2-4x^3\right)'=216x-12x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \text{أو} x=18$$

النقطة الحرجة $x=18\,(3/2\,\text{ft.})$ توافق الطول $y=36\,(3\,\text{ft})$، وعليه يعطي الحجم

$(3/2)^2(3)=27/4=6.75$ قدم مكعبة.

نقط النهاية هي $x=0$، والتي تعطي حجماً معدوماً، وعندما $x=y$، على سبيل المثال $x=9/5$ قدم، التي تعطي الحجم $(9/5)^3$ قدم مكعبة، والتي هي أصغر من 6 أقدام مكعبة. إذاً النقاط الحرجة تعطي الحجم الأكبر.

2C-5



نجعل $r=$ نصف قطر القاعدة و $h=$ الارتفاع، ومنه يكون الحجم $V=\pi r^2h$، وتكون المساحة $A=\pi r^2+2\pi rh$.

بالتعامل مع r على أنها متغير مستقل، فإننا قد استخدمنا الصيغ الموجودة أعلاه

$$h=\frac{A-\pi r^2}{2\pi r}\,,\quad V=\pi r^2h=\left(\frac{A}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3\right)\;;\quad \frac{dV}{dr}=\frac{A}{2}-\frac{3\pi}{2}r^2\,.$$

وبالتالي فإن $dV/dr=0$ تعني $A=3\pi r^2$، ومنها $h=\dfrac{A-\pi r^2}{2\pi r}=r$.

بالتحقق من النهايات، من ناحية $h=0$ و $V=0$؛ ومن ناحية أخرى، $\lim\limits_{r\to 0^+}V=0$ (استعمال العلاقة أعلاه من أجل V بدلالة r)؛ بحيث إنه يجب على النقطة الحرجة أن تظهر عند الأحد الأقصى.

(طريقة أخرى للقيام بهذه المسألة هي باستعمال التفاضل الضمني بدلالة r بسرعة، بما أنَّ A مثبت، $dA/dr=0$، وبالتالي فإن:

$$\frac{dA}{dr}=2\pi r+2\pi h+2\pi rh'=0 \quad \Rightarrow \quad h'=-\frac{r+h}{r}$$

$$\frac{dV}{dr}=2\pi rh+\pi r^2h'=2\pi rh-\pi r(r+h)=\pi r(h-r)$$

نستنتج أنَّ $V'=0$ عندما $r=h$ أو $r=0$ وهي نقطة نهاية غير مقبولة.

2C-6

للحصول على الحد الأقصى والحد الأدنى لـ $y=x(x+1)(x-1)=x^3-x$ ،

أولاً نجد النقاط الحرجة:

$y'=3x^2-1=0$ إذا كانت $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛

$y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ ، تمثل الحد الأدنى.

$y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ تمثل الحد الأقصى.

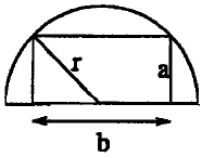
التحقق من النهايات:

$y(2)=6\Rightarrow 2$ هي الحد الأقصى المطلق؛

$y(-2)=-6\Rightarrow -2$ هي الحد الأدنى المطلق.

(هذه *مسألة نهايات*. يجب التحقق من النهايات إلا إذا كانت الصورة الفيزيائية أو الهندسية توضح أين يقع الحد الأدنى أو الحد الأقصى على النهاية.)

2C-7



ليكن r نصف القطر ثابتاً. عندئذ الارتفاع a للمستطيل في المجال $0\le a\le r$. يكون:

$$b=2\sqrt{r^2-a^2}$$

المساحة تعطى بالنسبة لـ a بـ $A=2a\sqrt{r^2-a^2}$

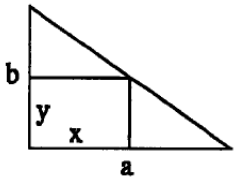
قيمة A عند نقاط النهاية $a=0$ و $a=r$ معدومة، بحيث يقع الحد الأقصى عند نقطة حرجة في الوسط.

$$\frac{dA}{da}=2\sqrt{r^2-a^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{r^2-a^2}}=\frac{2\left(r^2-a^2\right)-2a^2}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

بحيث $dA/da=0$ تعني $2r^2=a^2$، التي من أجلها نحصل على $a=\frac{r}{\sqrt{2}}$، $b=r\sqrt{2}$.

(نستعمل الجدر التربيعي الموجب بما أنَّ $a\geq 0$. لاحظ أنَّ $b=2a$ و $A=r^2$.)

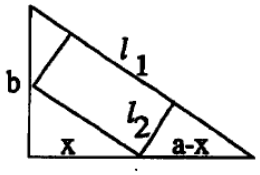
2C-8



a) إذا كانت a و b الساقين و x و y جوانب لمستطيل، يكون لدينا $y=-(b/a)(x-a)$ والمساحة $A=xy=(b/a)x(a-x)$. المساحة معدومة عند النهايتين $x=0$ و $x=a$ لذا يقع الحد الأقصى في الوسط عند نقاط حرجة:

$A'=(b/a)((a-x)-x)$؛ وهي تساوي 0 إذا كانت $x=a/2$.

بحيث $y=(b/a)(a-x)=b/2$ و $A=ab/4$.



b) لتكن x هي النقطة الموضحة على الشكل المرافق؛ باستعمال المثلثات نفسها، أضلع المستطيل هي

$$l_1=\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{و} \qquad l_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(a-x)$$

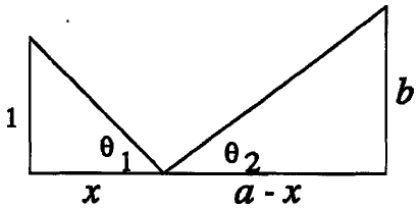
وبالتالي فإن المساحة تساوي:

$$A=l_1l_2=(b/a)x(a-x)$$

وهذه معادلة المساحة للطلب (a) نفسها، إذن فالمساحة الأكبر هي نفسها، تحدث عندما $x=a/2$، ولكل من المستطيلين الأعظمين المساحة نفسها؛ رغم أنهما مختلفان بالأبعاد، بما أنه في الحالة الحاضرة، طول ضلع واحد هو نصف الوتر:

$$l_1=\sqrt{a^2+b^2}/2 \text{ و } l_2=ab/2\sqrt{a^2+b^2}$$

2C-9



تكون المسافة:

$$L=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(a-x)^2+b^2}$$

نقاط النهايات هي $x\to\pm\infty$، من أجل $L\to\infty$ن لذلك يكون الحد الأقصى عند نقطة حرجة.

$$L'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}=\frac{x\sqrt{(a-x)^2+b^2}-(a-x)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$$

بحيث L' تعني (بعد تربيع الطرفين)،

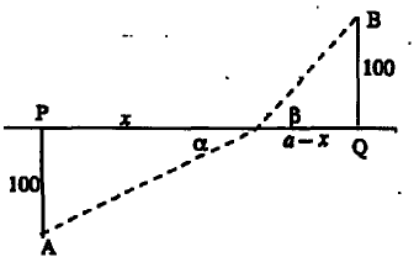
$$x^2\left((a-x)^2+b^2\right)=(a-x)^2\left(x^2+1\right)\quad\text{أو}\quad x^2b^2=(a-x)^2\quad\text{أو}\quad bx=(a-x)\text{؛}$$

لقد استعملنا الجذور التربيعية الموجبة بما أنَّه يجب على الطرفين كليهما أن يكونا موجباً. بكتابة ما سبق مرة أخرى،

$$\frac{b}{a-x}=\frac{1}{x}\quad\text{أو}\quad\tan\theta_1=\tan\theta_2$$

بحيث $\theta_1=\theta_2$: زاوية الورود تساوي زاوية الانعكاس.

2C-10



الزمن الكلي هو

$$T=\frac{\sqrt{100^2+x^2}}{5}+\frac{\sqrt{100^2+(a-x)^2}}{2}$$

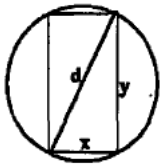
عندما $x\to\pm\infty$، $T\to\infty$، إذاً ستكون القيمة الدنيا عند نقطة حرجة.

$$T'=\frac{x}{5\sqrt{100^2+x^2}}-\frac{(a-x)}{2\sqrt{100^2+(a-x)^2}}=\frac{\sin\alpha}{5}-\frac{\sin\beta}{2}$$

وبالتالي فإنه إذا كان $T'=0$، نستنتج أنَّ

$$\frac{\sin\alpha}{5}=\frac{\sin\beta}{2} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{5}{2}$$

2C-11



باستعمال الاشتقاق الضمني:

$$x^2+y^2=d^2 \quad \Rightarrow 2x+2yy'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=-x/y$$

نريد أن تكون xy^3 بأقصى قيمة لها. عند نقاط النهاية $x=0$ و $y=0$، القوة معدومة، إذا هنالك حد أقصى عند نقطة حرجة. بالاشتقاق:

$$0=\left(xy^3\right)'=y^3+3xy^2y'=y^3+3xy^2\left(-x/y\right)=y^3-3x^2y$$

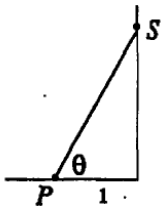
بالقسمة على x^3،

$$(y/x)^3-3(y/x)=0 \quad \Rightarrow \qquad (y/x)^2=3 \quad \Rightarrow \qquad y/x=\sqrt{3}$$

2C-12

الشدة متناسبة مع

$$y=\frac{\sin\theta}{1+x^2}=\frac{x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=x\left(1+x^2\right)^{-3/2}$$



نقاط النهاية: $y(0)=0$ و $y\to 0$ عندما $x\to\infty$ إذن سيكون الحد الأقصى عند نقطة حرجة. النقاط الحرجة تلبي شرط

$$y'=\left(1-2x^2\right)\left(1+x^2\right)^{-5/2}=0 \quad \Rightarrow \qquad 1-2x^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1/\sqrt{2}$$

الارتفاع الأفضل هو $1/\sqrt{2}$ قدم فوق المكتب. (ليست عملية، استعمل ضوءاً مكتبياً.)

2C-13

a) ليكن p السعر بالدولار. ثم سيكون هنالك $100+(2/5)(200-p)$ راكباً. وبالتالي فإن الدخل الكلي هو:

$$R = p(100 + (2/5)(200 - p)) = p(180 - (2/5)p)$$

عند "النهايات" السعر المعدوم $p = 0$ ، وبدون ركاب $p = (5/2)180 = 450$ ، الدخل معدوم. إذن فإن الحد الأقصى يحدث في الوسط عند نقطة حرجة.

$$R' = (180 - (2/5)p) - (2/5)p = 180 - (4/5)p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = (5/4)180 = 225\$$$

(b $P = xp - x(10 - x/10^5)$ مع $x = 10^5(10 - p/2)$

وبالتالي فإن، الربح بالسنتات هو

$$P = 10^5(10 - p/2)(p - 10 + (10 - p/2)) = 10^5(10 - p/2)(p/2) = (10^5/4)p(20 - p)$$

$$\frac{dP}{dp} = (10^5/2)(10 - p)$$

النقاط الحرجة عند $p = 10$. يمثل هذا $x = 10^5(10 - 5) = 5 \times 10^5$ كيلواط ساعي، الذي يقع في المجال المتوفر لخدمات الشركة. المشتقة الثانية للدالة P هي $-10^5/2$ ، إذن فهي مقعرة إلى الأسفل ويجب على النقطة الحرجة أن تكون الحد الأقصى. (تمثل هذه حالة من الحالات التي يكون فيها التحقق من المشتقة الثانية أسهل من النهايات.)

من الناحية الأخرى، قيم النهايات هي:

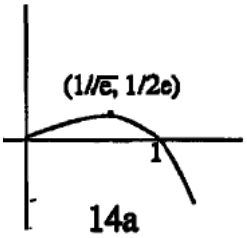
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10^5(10 - p/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 20 \Rightarrow P = 0$$

$$x = 8 \times 10^5 \quad \Rightarrow 8 \times 10^5 = 10^5(10 - p/2)$$
$$\Rightarrow 10 - p/2 = 8 \Rightarrow p = 4$$
$$\Rightarrow P = (10^5/4)4(20 - 4) = 16 \times 10^5 \text{ cents} = \$160{,}000$$

الربح عند النقطة الحرجة كان

$$(10^5/4)10(20 - 10) = 2.5 \times 10^6 \text{ cents} = \$250{,}000 .$$

2C-14

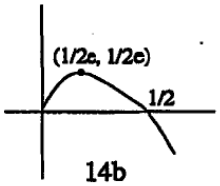


a) النهايات: $y = -x^2 \ln(x) \to 0$ عندما $x \to 0^+$ و $y \to -\infty$ عندما $x \to \infty$.

النقاط الحرجة: $y' = -2x\ln x - x = 0 \quad \Rightarrow \ln x = -1/2 \Rightarrow x = 1/\sqrt{e}$.

القيم الحرجة: $y\left(1/\sqrt{e}\right) = 1/2e$.

الحد الأقصى: $1/2e$، يُحقق عند $x = 1/\sqrt{e}$. (لا يحقق الحد الأدنى)



14b

b) النهايات: $y = -x\ln(2x) \to 0$ عندما $x \to 0^+$ و $y \to -\infty$ عندما $x \to \infty$.

النقاط الحرجة: $y' = -\ln 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1/2e$.

القيم الحرجة: $y(1/2e) = -(1/2e)\ln(1/e) = 1/2e$.

الحد الأقصى: $1/2e$، يتحقق عند $x = 1/2e$. (لا يتحقق الحد الأدنى)

2C-15

لا يوجد حد أدنى. المشتق هو $-xe^{-x} < 0$، إذاً تتناقص الدالة. (لسنا بحاجة لها هنا، لكن سنستنتج من E13/7 أو من قاعدة لوبيتال في E31 أنَّ $xe^{-x} \to 0$ عندما $x \to \infty$.)

2D. المزيد من مسائل الحد الأقصى والحد الأدنى

2D-1

يضاف حليب في لحظة معينة t_1، بحيث $0 \le t_1 \le 10$. في المجال $0 \le t \le t_1$ تكون درجة الحرارة

$$y(t) = (100-20)e^{-(t-0)/10} + 20 = 80e^{-t/10} + 20$$

وبالتالي،

$$T_1 = y(t_1^-) = 80e^{-t_1/10} + 20$$

نضيف الحليب عند درجة حرارة $T_2 = 5$، إذاً تكون درجة الحرارة عندما نبدأ في الفترة الثانية للتبريد

$$\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}T_2 = 72e^{-t_1/10} + 18 + \frac{1}{2}$$

لتكن $Y(t)$ درجة حرارة القهوة في المجال $t_1 \le t \le 10$. وقد قمنا بحساب $Y(t_1)$، بحيث

$$Y(t) = (Y(t_1) - 20)e^{-(t-t_1)/10} + 20 = (72e^{-t_1/10} - 1.5)e^{-(t-t_1)/10} + 20$$

درجة الحرارة النهائية هي

$$T = Y(10) = (72e^{-t_1/10} - 1.5)e^{-(10-t_1)/10} + 20 = e^{-1}(72 - (1.5)e^{t_1/10}) + 20$$

نريد الوصول بدرجة الحرارة للحد الأعلى لذا نبحث عن النقاط الحرجة:

$$\frac{dT}{dt_1} = -(1.5/10e)e^{t_1/10} < 0$$

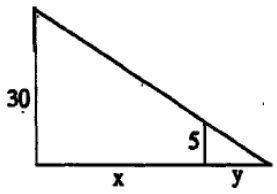
وبالتالي فإن الدالة $T(t_1)$ تتناقص ويكون الحد الأقصى عند نقطة النهاية اليسرى:

$$t_1 = 0.$$

النتيجة: ستكون القهوة بأعلى درجة إذا أضفنا الحليب بأسرع وقت ممكن.

2E. المعدلات ذات الصلة

2E-1



المسافة من الروبوت إلى النقطة على الأرض مباشرة تحت إنارة الشارع هي $x = 20t$. وبالتالي فإن، $x' = 20$.

$\frac{x+y}{30} = \frac{y}{5}$ (المثلثات المتشابهة)

وبالتالي،

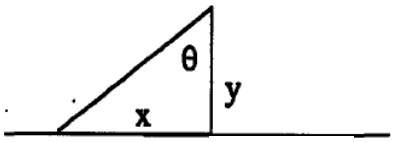
$(x'+y')/30 = y'/5 \quad \Rightarrow \quad y' = 4$ و $(x+y)' = 24$

طرف الظل يتحرك بـ 24 قدماً في الثانية وطول الظل يزداد بـ 4 أقدام في الثانية

2E-2

$\tan\theta = \frac{x}{4}$ و $d\theta/dt = 3(2\pi) = 6\pi$

مع t مقاسة بالدقائق و θ مقاسة بالراديان. يصنع الضوء زاوية $60°$ مع الشاطئ عندما θ تكون $30°$ أو $\theta = \pi/6$. بالاشتقاق بالنسبة إلى t نحصل على:

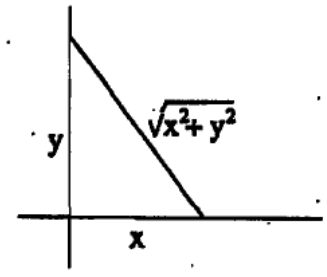


الشاطىء

$$\sec^2\theta(d\theta/dt) = (1/4)(dx/dt)$$

بما أنَّ $\sec^2(\pi/6) = 4/3$، فإننا نحصل على $dx/dt = 32\pi$ ميلاً في الثانية.

2E-3



المسافة هي $x = 10$ ، $y = 15$ ، $x' = 20$ و $y' = 30$. وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)' &= (1/2)(2xx'+2yy')(x^2+y^2)^{-1/2} \\ &= (10(30)+15(30))/\sqrt{10^2+15^2} \\ &= 150/\sqrt{13} \text{ ميلا في الساعة}\end{aligned}$$

2E-4

$V=(\pi/3)r^2h$ و $2r=d=(3/2)h$ يعني $h=(4/3)r$.

وبالتالي فإن

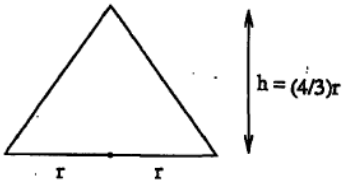
$$V=(\pi/3)r^2h=(4\pi/9)r^3$$

ومن ناحية أخرى، $dV/dt=12$، ومنه

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=\left(\frac{d}{dr}(4\pi/9)r^3\right)\frac{dr}{dt}=(4\pi/3)r^2(12)=16\pi r^2$$

عندما $h=2$، $r=3/2$، بحيث

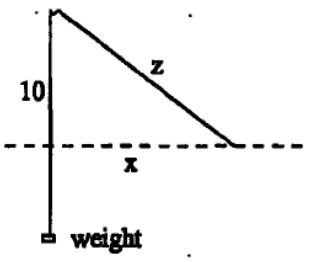
$$\frac{dV}{dt}=36\pi\ \mathrm{m}^3/\mathit{minute}$$



2E-5

المعلومة هي:

$$x^2+10^2=z^2,\quad z'=4$$



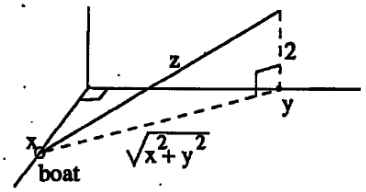
نريد تقييم x' عند $x=20$. (المشتقات تشتق بالنسبة للزمن.) بحيث

$$2xx'=2zz' \text{ و } z^2=20^2+10^2=500$$

لذلك،

$$x'=(zz')/x=4\sqrt{500}/20=2\sqrt{5}$$

2E-6



$x'=50$ و $y'=400$ و

$$z^2=x^2+y^2+2^2$$

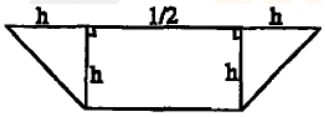
تتمثل المسألة في حساب z' عندما $x=50$ و $y=400$. إذاً

$$2zz'=2xx'+2yy' \quad \Rightarrow \quad z'=(xx'+yy')/z$$

و $z=\sqrt{50^2+400^2+4}=\sqrt{162504}$. إذاً $z'=162500/\sqrt{162504}\approx 403\text{mph}$.

(حقيقة أنَّ الطائرة ترتفع 2 ميل عن مستوى البحر مقارنة مع وجودها عند مستوى البحر تُغير الجواب بـ 4/1000 فقط. حتى سرعة الباخرة فإنها تُغير الجواب بحوالي 3 أميال في الساعة فقط.)

2E-7



مساحة المقطع العرضي $=h^2+h/2$

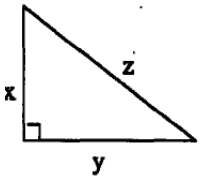
$V=4(h^2+h/2)$، $V'=1$. لحساب h' عند $h=1/2$،

$$1=V'=8hh'+2h'=8(1/2)h'+2h'=6h'$$

وبالتالي:

$h'=1/6$ متر في الثانية

2E-8



$x'=60$، $y'=50$ و $x=60+60t$، $y=50t$. اللحظة $t=0$ هي منتصف النهار ويقاس t بالساعات. لإيجاد الزمن عندما تكون $z=\sqrt{x^2+y^2}$ أصغر ما يمكن في الحد الأدنى، يمكننا أيضاً تصغير $z^2=x^2+y^2$. نحن نعلم أنه سيكون هناك حد أدنى عند نقطة حرجة لأنه عندما $t\to\pm\infty$ فإن المسافة تؤول إلى مالانهاية. وبأخذ المشتق بالنسبة إلى الزمن t، تحقق النقطة الحرجة:

$$2xx'+2yy'=0$$

هذه المعادلة تبين أن:

$$2((60+60t)60+(50t)50)=0 \quad \Rightarrow \quad (60^2+50^2)t=-60^2$$

ومنه

$$t = -36/61 \approx -35 \text{ min}$$

تكون السفينتان أقرب ما يمكن لبعضهما بعضاً عند حوالي 11:25 am.

2E-9

$dy/dt = 2(x-1)dx/dt$. لاحظ أنه في المجال $x<1$، $x-1$ سالبة كذلك $(x-1) = -\sqrt{y}$. وبالتالي،

$$dx/dt = (1/2(x-1))(dy/dt) = -(1/2\sqrt{y})(dy/dt) = +(\sqrt{y})(1-y)/2 = 1/4\sqrt{2}$$

<u>الطريقة 2:</u>

القيام بهذا مباشرة يكون أسرع:

$$x = 1-\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad dx/dt = 1-(1/2)y^{-1/2}dy/dt$$

وما تبقى هو كما سبق.

2E-10

$r = Ct^{1/2}$. الافتراض الضمني هو أنَّ حجم الزيت ثابت:

$$\pi r^2 T = V \quad \text{أو} \quad r^2 T = (V/\pi) = \text{ثابت}$$

وبالتالي، بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن t

$$(r^2T)' = 2rr'T + r^2T' = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = -2r'/r$$

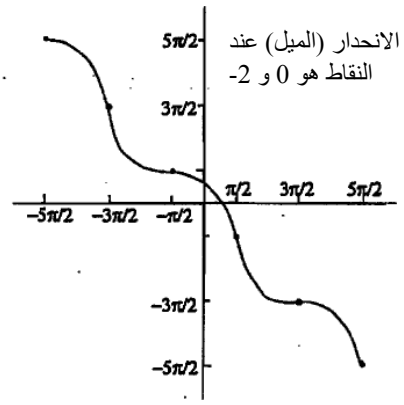
لكن $r' = (1/2)Ct^{-1/2}$، إذاً $r'/r = 1/2t$. وبالتالي

$$T' = -1/t$$

(بالرغم من أننا نعلم فقط ما يخص معدل التغير لـ r حتى ثابت التناسب، فإنه يمكننا حساب معدل تغير T المطلق.)

2F. تحديد موقع الصفر؛ طريقة نيوتن

2F-1



$a)$ $y' = -\sin x - 1 \le 0$. أيضا، $y' < 0$ ما عدا عند قائمة النقاط المتقطعة (حيث $\sin x = -1$). لذلك فإن y يتناقص بشدة، وحيث، $x_1 < x_2 \Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$. لذا فإن y يقطع الصفر مرة واحدة فقط.

الحدود العليا والسفلى بالنسبة إلى z بحيث $y(z) = 0$:

$y(0) = 1$ و $y(\pi/2) = -\pi/2$. وبالتالي، $0 < z < \pi/2$.

$b)$ $x_{n+1} = x_n - (\cos x_n - x_n)/(\sin x_n + 1)$

$x_1 = 1,$ $\quad x_2 = .750363868$

$x_2 = .739112891,$ $\quad x_4 = .739085133$

دقيق إلى درجة ثلاثة أرقام بعد الفاصلة عند x_3، الخطوة الثانية. الإجابة .0.739

$c)$ طريقة النقطة الثابتة تحتاج إلى 53 خطوة للتثبيت عند 739085133. طريقة نيوتن تحتاج إلى ثلاث خطوات فقط للحصول على دقة بدرجة 9 أرقام بعد الفاصلة. (انظر x_4.)

2F-2

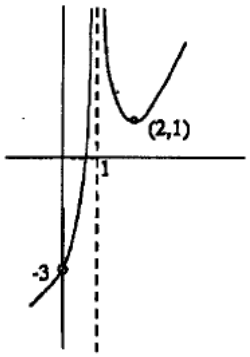
$$y = 2x - 4 + \frac{1}{(x-1)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$y' = 2 - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{2\left((x-1)^3 - 1\right)}{(x-1)^3}$$

y' =0 تعني أن $(x-1)^3 = 1$، والتي تعني أنَّ $x - 1 = 1$ ومنه أنَّ $x = 2$. تغير إشارة y' يكون عند النقطة الحرجة $x = 2$ وعند النقطة المفردة $x = 1$. من أجل $x < 1$، البسط والمقام سالبان، إذاً $y' > 0$.

من أجل $1<x<2$، يبقى البسط سالب، لكن المقام موجب، إذاً $y'<0$. من أجل $x>2$، كل من المقام والبسط موجبان، إذاً $y'>0$.

$$y''=\frac{6}{(x-1)^4}$$



وبالتالي، $y''>0$ من أجل $x\neq 1$.

القيمة الحرجة: $y(2)=1$

القيم المفردة: $y(1^-)=y(1^+)=\infty$

قيم النهايات: $y\to\infty$ عندما $x\to\infty$ و $y\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$.

النتيجة: تتزايد الدالة من $-\infty$ إلى ∞ على المجال $(-\infty,1)$. وبالتالي، تنعدم الدالة مرة واحدة بالضبط في هذا المجال. تتناقص الدالة من ∞ إلى 1 على المجال $(1,2)$ وتتناقص من 1 إلى ∞ على المجال $(2,\infty)$. وبالتالي، فإن الدالة لا تنعدم على الإطلاق في المجال $(1,\infty)$. وأخيراً الدالة مقعرة من الأعلى على المجالين $(-\infty,1)$ و $(1,\infty)$

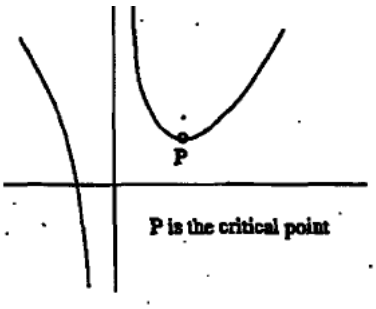
2F-3

$$y'=2x-x^{-2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

وبالتالي فإن $y'=0$ تعني أن $x^3=1/2$ أو $x=2^{-1/3}$. وأيضاً، $y'>0$ عندما $x>2^{-1/3}$، و $y'<0$ عندما $x<2^{-1/3}$ و $x\neq 0$. الإشارة لا تتغير مروراً بالنقطة المفردة $x=0$ لأن الأس في المقام زوجي.

(يتبع ←)

$$y''=2+2x^{-3}=\frac{2\left(x^3+1\right)}{x^3}$$



و بالتالي فإن $y''=0$ تعني أن $x^3=-1$ أو $x=-1$. تتبع أثر تغير الإشارة في المقام كما في البسط يبين لنا أنَّ $y''>0$ عندما $x>0$ و $y''<0$ عندما $-1<x<0$. أخيراً $y''>0$ عندما $x<-1$، وكل من البسط والمقام سالبان.

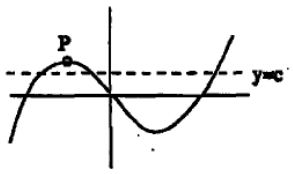
القيمة الحرجة: $y\left(2^{-1/3}\right)=2^{-2/3}+2^{1/3}\approx 1.9$

القيمة المفردة: $y(0^+)=+\infty$ و $y(0^-)=-\infty$

قيم النهايات: $y\to\infty$ عندما $x\to\pm\infty$

النتيجة: تتناقص الدالة من ∞ إلى $-\infty$ في المجال $(-\infty,0)$. وبالتالي فإنها تنعدم بالضبط مرة واحدة في هذا المجال. تقفز إلى ∞ عند 0 وتتناقص من ∞ إلى $2^{-2/3}+2^{1/3}$ في المجال $(0,2^{-1/3})$. أخيراً تتزايد الدالة من $2^{-2/3}+2^{1/3}$ إلى ∞ في المجال $(2^{-1/3},\infty)$. إذاً لا تنعدم في المجال $(0,\infty)$. الدالة مقعرة من الأعلى في المجالين $(-\infty,-1)$ و$(0,\infty)$ ومقعرة من الأسفل في المجال $(-1,0)$ مع نقطة انعطاف عند -1.

2F-4



من المنحنى، $x^5-x-c=0$ لها ثلاثة جذور من أجل أية قيمة صغيرة لـ c. قيمة c تصبح كبيرة جداً إذا تجاوزت الحد الأقصى المحلي لـ x^5-x المبين. لحساب هذا الحد الأقصى المحلي، نعتبر $y'=5x^4-1=0$، ومجموعة الحل $x=\pm5^{-1/4}$. الحد الأقصى المحلي هو عند $x=-5^{-1/4}$ والقيمة هي

$$\left(-5^{-1/4}\right)^5-\left(-5^{-1/4}\right)=5^{-1/4}-5^{-5/4}\approx .535$$

بما أنَّ $1/2<.535$، إذاً يوجد ثلاثة جذور.

2F-5

a) الإجابة: $x_1=\pm1/\sqrt{3}$. إذاً $f(x)=x-x^3$، و $f'(x)=1-3x^2$

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$$

إذن x_2 غير معرفة إذا كان $f'(x_1)=0$، هو $x_1=\pm1/\sqrt{3}$.

b) الإجابة: $x_1=\pm1/\sqrt{5}$. (يمكن إيجاد هذه القيمة بالتجربة. يمكن أيضا إيجادها بالتكرار العكسي لطريقة نيوتن.)

الشرح: باستعمال حقيقة أنَّ f فردية وأنَّ $x_3 = x_1$ تشير إلى أنَّ $x_2 = -x_1$. هذا يبسط المعادلة بشكل كبير.

$$x_{n+1} = x_n - \left(x_n - x_n^3\right)/\left(1-3x_n^2\right) = \frac{-2x_n^3}{1-3x_n^2}$$

وبالتالي فإننا بحاجة إلى إيجاد x التي تحقق:

$$-x = \frac{-2x^3}{1-3x^2}$$

وهذه هي المعادلة نفسها $x\left(1-3x^2\right) = 2x^3$، التي تعني أن $x = 0$ أو $5x^2 = 1$. بكلمات أخرى، $x = \pm 1/\sqrt{5}$. الآن يمكننا التحقق من أنه إذا كانت $x_1 = 1/\sqrt{5}$، تكون $x_2 = -1\sqrt{5}$، $x_3 = +1/\sqrt{5}$، الخ.

c) الإجابات: إذا كانت $x_1 < -1/\sqrt{3}$، عندها $x_n \to -1$ وإذا كانت $x_n > 1/\sqrt{3}$، فإن $x_n \to 1$. إذا كانت $-1/\sqrt{5} < x_1 < 1/\sqrt{5}$، عندها $x_n \to 0$. يمكن إيجاد هذا تجريبياً، وعددياً. بالنسبة للتحليل الكلي والبرهان، نحن بحاجة إلى طرق تفوق مستوى هذا المساق مثل المساق 18.100.

2F-6

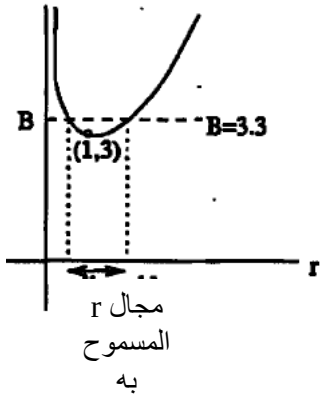
a) لتبسيط هذه المسألة إلى أساسها، لتكن $V = \pi$. (نحن نبحث عن النسبة r/h وستكون نفسها بغض النظر عما ستكون قيمة V.) إذاً $r^2 h = 1$ و

$$A = \pi r^2 + 2\pi / r$$

عوضاً عن ذلك بتصغير $B = A/r$:

$$B = r^2 + 2r^{-1} \quad \Rightarrow \quad B' = 2r - 2r^{-2}$$

و $B' = 0$ تعني أن $r = 1$. النهايات $B \to \infty$ عندما $r \to 0$، وعندما $r \to \infty$ أي وجدنا القيمة الدنيا عند $r = 1$. (الشرط $r^2 h = 1$ يبين أنَّ الحد الأدنى هذا يحقق عندما $r = h = 1$. للتحقق مرة أخرى، حقيقة أنَّ المساحة الدنيا قد حققت من أجل $r/h = 1$ تستنتج من $2C - 5$ انظر الجزء (b) .)



القيمة الدنيا لـ B هي 3 تحدث عند $r=1$. 10% أكبر من الحد الأدنى يكون 3.3، إذن يتوجب علينا إيجاد كل قيم r بحيث

$$B(r)\le 3.3$$

نستعمل طريقة نيوتن مع $F(r)=B(r)-3.3$. (من غير الحكمة البدء بطريقة نيوتن انطلاقاً من $r=1$. لماذا؟) جذور F هي بالتقريب $r=1.35$ و $r=.72$.

بما أنَّ $r^2h=1$، $h=1/r^2$ والنسبة

$$r/h/r^3$$

احسب $(1.35)^3\approx 2.5$ و $(.72)^3\approx .37$. وبالتالي فإن النسبة مع 10% على الأكثر من الزجاج الزائد هي تقريباً $.37<r/h<2.5$.

b) العلاقة مع المسألة 2C-5 هي أنَّ المساحة الصغرى $r=h$ غير واضحة تماماً، ليس فقط لأننا نتعامل مع كؤوس زجاجية بدلاً من العلب. في E 10/5 المساحة مثبتة في حين أنَّ حجمها هنا يبقى مثبتاً. لكن بما أننا بحاجة إلى مساحة أكبر للحصول على حجم أكبر، فتكبير الحجم مع تثبيت المساحة يشكل المسألة نفسها كتصغير المساحة مع إبقاء الحجم ثابتاً. هذا مبدأ مهم يسمى بمبدأ الثنائية، في كثير من الأحيان يستعمل عادة في مسائل الحالات المثلى. في المسألة 2C-5 كانت الإجابة $r=h$، التي تشكل النسبة من أجل المساحة الصغرى كما تم اثباته الجزء (a).

2F-7

تصغير المسافة المربعة، x^2+y^2. النقاط الحرجة تحقق:

$$2x+2yy'=0$$

الشرط $y=\cos x$ يعني أن $y'=-\sin x$. وبالتالي

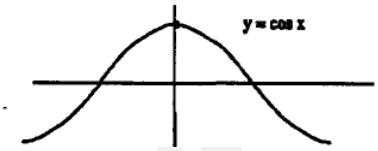
$$0=x+yy'=x-\cos x\sin x$$

هنالك حل واضح $x=0$. سبب تواجد هذه المسألة في هذه الفقرة هي أننا قد نكون بحاجة إلى أدوات غير المساواة للتأكد من أنَّه ما من حلول أخرى. بالفعل، إذا كانت

$f(x)=x-\cos x\sin x$ ، عندها $f'(x)=1-\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x\geq 0$

كذلك، $f'(x)$ موجبة تماماً ما عدا عند النقاط $x=k\pi$ ، إذاً تتزايد f وتقطع الصفر مرة واحدة.

هنالك فقط نقطة حرجة واحدة والمسافة تؤول إلى مالانهاية عند النهايات $x\to\pm\infty$ ، لذا هذه النقطة هي الحد الأدنى. النقطة على المنحنى الأقرب من المبدأ هي $(0,1)$



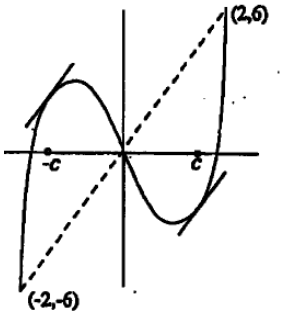
<u>طريقة بديلة</u>: لنبين أنَّ $(0,1)$ قريبة، يكفي فقط أن نبين أنه من أجل $-1\leq x<0$ و $0<x\leq 1$

$\sqrt{1-x^2}<\cos x$

التربيع يعطي $1-x^2<\cos^2 x$. يمكن لهذا أن يبرهن باستعمال المبادئ في المسائل 6 و7. مشتق $\cos^2 x-(1-x)$ هي الدالة f مرتين، إذن الطرق متشابهة جداً.

2G. نظرية القيمة المتوسطة

2G-1



a) ميل الحبل =1؛ $f'(c)=1 \Rightarrow f'(x)=2x$ إذا كان $c=\frac{1}{2}$.

b) ميل الحبل $=\ln 2$؛ $f'(c)=\ln 2$ $f'(c)=1/x$ كان $c=\frac{1}{\ln 2}$.

c) من أجل x^3-x : يكون ميل الحبل $3=\frac{6-(-6)}{4}=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$؛

$$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow \quad f'(c)=3c^2-1=3 \quad \Rightarrow \quad c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

إنطلاقاً من الشكل، فإنه من الواضح أنه يمكنك الحصول على قيمتين لـ c. (المحوران غير مرسومان في المقياس نفسه.)

2G-2

a) $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ ؛ خذ $a=0$ ؛ $f'(\zeta)=\sin x$ ، $f'(x)=\cos x$

$\Rightarrow f(x)=0+\cos c\cdot x \Rightarrow \sin x<x$ ($0<c<2\pi$ من أجل $\cos c<1$ بما أن)

بحيث تكون عدم المساواة صالحة من أجل $0<x\le 2\pi$؛ بما أنَّ الدالة دورية، هي صالحة أيضاً بالنسبة إلى كل $x>0$.

b) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2\sqrt{1+c}}x<1+\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\sqrt{1+x}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ، بما أنَّ $c>0$.

2G-3

لتكن المسافة $=s(t)$؛ إذن تكون السرعة المتوسطة = ميل الحبل $=66=\frac{121}{11/6}$.

و بالتالي فإنه حسب MVT ، في بعض الأحيان يكون $t=c$ بحيث أنَّ $s'(c)=66>65$.

(تطبيق نظرية القيمة المتوسطة لتدعيم المرور...)

2G-4

حسب نظرية رول (النظرية 1. صفحة 800: حالة خاصة هامة لنظرية القيمة المتوسطة، وخطوات البرهان عليها)، بين جذرين لـ$p(x)$ يوجد على الأقل جذر لـ$p'(x)$. وبالتالي، فإن الجذر n a_1 ، ... a_n لـ$p(x)$ يوجد على الأقل عند $n-1$ لجذور لـ $p'(x)$.

ليس هنالك أكثر من $n-1$ جذر، بما أنَّ درجة $p'(x)=n-1$ ؛ بحيث $p'(x)$ لها بالضبط $n-1$ جذراً.

2G-5

نفترض أنَّ $f(x)=0$ عند a,b,c .

استنادا إلى نظرية رول (كما في MTV-4)، هنالك نقطتان q_1 ، q_2 حيث $f'(q_1)=0$ ، $f'(q_2)=0$.

انطلاقا من نظرية رول مرة أخرى، بالتطبيق على q_1 و q_2 و $f'(x)$ ، هنالك نقطة p حيث $f''(p)=0$. بما أنَّ p تقع بين q_1 و q_2 ، هي أيضاً بين a و c.

2G-6

a) لدينا نقطتان x_i بحيث $a\le x_1<x_2\le b$ ، لدينا

$f(x_2)=f(x_1)+f'(c)(x_2-x_1)$ ، عندما $x_1<c<x_2$.

بما أنَّ $f'(x)>0$ عند $[a,b]$، $f'(c)>0$ ؛ وأيضاً $x_2-x_1>0$. بالتالي فإن $f(x_2)>f(x_1)$ ، ما يبين أنَّ $f(x)$ تتزايد.

b) لدينا $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ حيث $a<c<x$.

بما أنَّ $f'(c)=0$ ، $f(x)=f(a)$ من أجل $a\le x\le b$ ، ما يبين أنَّ $f(x)$ ثابتة على المجال $[a,b]$