الوحدة 3. التكامل

3A. المشتقات، التكامل غير المحدود

3A-1

احسب المشتقات $df(x)$ للدوال التالية:

a) $d(x^7+\sin 1)$ b) $d\sqrt{x}$ c) $d(x^{10}-8x+6)$

d) $d(e^{3x}\sin x)$ e) عبر عن dy بدلالة x و dx إذا كانت $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

3A-2

احسب التكاملات غير المحددة التالية:

a) $\int (2x^4+3x^2+x+8)dx$ b) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ c) $\int \sqrt{8+9x}dx$

d) $\int x^3(1-12x^4)^{1/8}dx$ e) $\int \frac{x}{\sqrt{8-2x^2}}dx$ f) $\int e^{7x}dx$

g) $\int 7x^4e^{x^5}dx$ h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ i) $\int \frac{dx}{3x+2}$

j) $\frac{x+5}{x}dx$ k) $\int \frac{x}{x+5}dx$ (أكتب $\frac{x}{x+5}=1+\cdots$)

l) $\frac{\ln x}{x}dx$ m) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

3A-3

احسب التكاملات غير المحددة التالية

a) $\sin(5x)dx$ b) $\int \sin(x)\cos(x)dx$ c) $\int \cos^2 x\sin x dx$

$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ (d

$\sec^2(x/5)dx$ (e

$\int \tan^6 x \sec^2 x dx$ (f

$\int \sec^9 x \tan x dx$ (g

3B. التكاملات المحدودة

3B-1

احسب ما يلي:

a) $\sum_{n=1}^{4} n^2$ b) $\sum_{j=1}^{6} 2^j$

c) $\sum_{j=1}^{5} (-1)^j j^2$ d) $\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n}$

3B-2

عبِّر عن ما يلي باستخدام الرمز Σ:

a) $3-5+7-9+11-13$ b) $1+1/4+1/9+\cdots+1/n^2$

c) $\sin x/n+\sin(2x/n)+\cdots+\sin((n-1)x/n)+\sin x$

3B-3

أكتب مجموع ريمان العلوي، السفلي، الأيمن والأيسر للتكاملات التالية، باستعمال 4 قطاعات فرعية متساوية:

a) $\int_0^1 x^3 dx$ b) $\int_{-1}^{3} x^2 dx$ c) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

3B-4

احسب الفرق بين مجموع ريمان العلوي والسفلي للتكاملات التالية باستخدام n قطاع.

a) $\int_a^b x^2 dx$ b) $\int_0^b x^3 dx$

هل يؤول الفرق إلى 0 عندما يؤول n إلى مالانهاية؟

3B-5

قيِّم النهاية، بربطها بمجموع ريمان.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(b/n)+\sin(2b/n)+\cdots+\sin((n-1)b/n)+\sin(nb/n)}{n}$$

3B-6*

احسب $\int_0^1 e^x dx$ باستعمال مجموع ريمان.

<u>تلميح</u>: المجموع عبارة عن تزايد جبري. أنت بحاجة إلى النهاية $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$. يمكن حساب هذا بوضع $h=1/n$ وربط النهاية بمشتقة e^x عند $x=0$.

3B-7*

احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{b/n}+2^{2b/n}+\cdots+2^{(n-1)b/n}+2^{nb/n}}{n}$$

(أنظر 3B-6)

3C. النظرية الأساسية للحساب

3C-1

أوجد المساحة تحت المنحنى $y=1/\sqrt{x-2}$ من أجل $3\le x\le 6$

3C-2

احسب:

a) $\int_0^2 \sqrt{3x+5}dx$ b) $\int_0^2 (3x+5)^n dx$ c) $\int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$

3C-3

احسب:

a) $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}dx$ b) $\int_b^{2b} \frac{xdx}{x^2+b^2}dx$

3C-4

احسب $\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-10}dx$. ما هي المساحة التي يمثلها هذا التكامل؟

3C-5

أوجد المساحة

a) تحت قوس واحد لمنحنى $\sin x$

b) تحت قوس واحد لمنحنى لـ sinax من أجل a ثابت موجب.

3C-6

أوجد المساحة بين المحور x و:

a) المنحنى $y=x^2-4$

b) المنحنى $y=x^2-a$ من أجل $a>0$

3D. النظرية الأساسية الثانية

3D-1

a) برهن على أنَّ $a>0, x>0$ $\quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a,$

b) من أجل أي قيمة لـ c يكون $\int_c^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ ؟

3D-2*

بين أنَّ الدالة $y=\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ تحقق شرط المعادلة التفاضلية مع الشروط الإضافية:

$y'y''=-x$ ؛ $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$.

3D-3

ناقش الدالة $F(x)=\int_0^x \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$ ، متضمناً التمثيل البياني؛ اشرح

a) المجال لقيم t

b) الحدان الأقصى والأدنى النسبيان، أين يتزايدان ويتناقصان، نقاط الانعطاف.

c) سلوك الدالة عندما $x\to\infty$ (تلميح: قيم التكامل عندما $t\to\pm\infty$.)

d) التناظر حول المحور y أو المبدأ.

3D-4

أوجد الدالة التي مشتقتها هي $\sin\left(x^3\right)$ والتي قيمتها عند 0 هي:

a) 0

b) 2

c) أوجد الدالة التي قيمتها عند 1 تكون -1

3D-5

احسب $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_1^{1+\Delta x}\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt$ بطريقتين:

a) بتمثيل التكامل على أنه المساحة تحت المنحنى.

b) بربط النهاية إلى $F'(1)$، حيث $F(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt$

3D-6

من أجل قيم مختلفة لـ a، الدوال $F(x)=\int_a^x dt$ تختلف عن بعضها بعضاً بثوابت. بين هاتين الطريقتين:

a) بشكل مباشر

b) باستعمال النتيجة الطبيعية لنظرية القيمة المتوسطة المنصوص عليها في ((8)، p.FT.5)

3D-7

قم بحساب $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=$

a) $\int_0^{x^2}\sqrt{u}\sin u\,du$ b) $\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ c) $\int_x^{x^2}\tan u\,du$

3D-8

لتكن $f(x)$ مستمرة. أوجد $f(\pi/2)$ إذا كانت:

a) $\int_0^x f(t)dt=2x(\sin x+1)$

b) $\int_0^{x/2} f(t)dt=2x(\sin x+1)$

3E. تغير المتغيرات؛ تقدير التكاملات

3E-1

بيّن مباشرة من التعريف $L(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ أنَّ $L\left(\frac{1}{a}\right)=-L(a)$ ، وذلك باستعمال تغيير المتحولات في التكامل المحدد.

3E-2

الدالة المعرفة بـ $E(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$ تستعمل في الاحتمالات والإحصاءات ولها أهمية الدوال الجيبية نفسها في العلاقات المثلثية.

a) عبِّر عن $E(x)$ بدلالة الدالة التي في المثال 5 من ملحق المحاضرة 20، $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ بالقيام بتغيير المتحول. من المعلوم أنَّ $\lim_{x\to\infty} F(x)=\sqrt{\pi}/2$. ما هي $\lim_{x\to\infty} E(x)$ ؟

b) احسب $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} e^{-u^2/2}du$ و نهاية $\lim_{x\to-\infty} E(x)$.

c) عبر عن $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du$ بدلالة الدالة E والثوابت a و b ، حيث $a<b$

3E-3

بالتعويض وتغيير كل من المتحول والنهايات احسب التكامل

a) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ $\quad (u=\ln x)$

b) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}dx$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (x=\sin u)$

d) $\int_{18}^{19} \frac{dx}{x^2-34x+289}$ $\quad (x=z+17)$

3E-4

من التكامل المحدد $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi/2$ استنتج قيمة $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ بالقيام بالتغيير الملائم للمتحول من الشكل $x=ct$ (c هو ثابت)

3E-5

لتكن $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a) برهن على أنه إذا كانت $f(t)$ دالة زوجية، فإن $F(x)$ فردية.

b) برهن على أنه إذا كانت $f(t)$ دالة فردية ، فإن $F(x)$ زوجية.

تلميح: قم بتغيير المتغير $u=-t$ في التكامل المحدود. (قارن بـ $6-4$.)

3E-6

بمقارنة التكامل المعطى بتكامل سهل الحساب. برهن التقديرات التالية:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}>0.65$ b) $\int_0^{\pi}\sin^2 x dx<2$ c) $\int_{10}^{20}\sqrt{x^2+1}dx>150$

3E-7

بيّن أنّ $\left|\int_1^N \frac{\sin x}{x^2}dx\right|<1$

3F. المعادلات التفاضلية: الفصل بين المتغيرات

3F-1 قم بحل المعادلات التفاضلية التالية

a) $dy/dx=(2x+5)^4$ b) $dy/dx=(y+1)^{-1}$

c) $dy/dx=3/\sqrt{y}$ d) $dy/dx=xy^2$

3F-2

قم بحل كل المعادلات التفاضلية بالشروط الابتدائية المعطاة، وقيم الحل عند القيمة المعطاة لـ x :

a) $y(1)=3.$ $dy/dx=4xy,$ أوجد $y(3)$

b) $y(0)=1.$ $dy/dx=\sqrt{y+1},$ أوجد $y(3)$

c) $y(0)=10.$ $dy/dx=x^2y^{-1},$ أوجد $y(5)$

d) $y(0)=0$ $dy/dx=3y+2,$ أوجد $y(8)$

e) $y(3)=0$ $dy/dx=e^y,$ أوجد $y(0)$. من أجل أية قيم لـ x يكون الحل y معرفاً؟

3F-3

a) قم بحل $dy/dx=y^2$ مع $y=1$ عند $x=0$. قم بحل y عند $x=1/2$ ، عند $x=-1$ ، وعند $x=1$.

b) مثل الحل بيانياً واستعمل التمثيل البياني لمناقشة مجال صحة المعادلة من أجل y . بالتحديد، فسر لمَ تكون القيمة الظاهرية عند $x=3/2$ مشبوهة!

3F-4

قانون نيوتن للتبريد يقول إنَّ معدل تغير درجة الحرارة يتناسب مع فرق درجة الحرارة. بالرموز، إذا كان جسماً عند درجة حرارة T عند اللحظة t ودرجة حرارة المنطقة المحيطة به ثابتة T_e (e تعني خارجية)، إذن يكون معدل تغير T معطى بـ :

$$dT/dt=k(T_e-T).$$

الثابت $k>0$ هو ثابت التناسب الذي يعتمد على خصائص الجسم مثل الحرارة النوعية ومساحة السطح.

a) لماذا يكون $k>0$ الاختيار الفيزيائي الوحيد الصحيح؟

b) أوجد المعادلة من أجل T إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية عند اللحظة $t=0$ هي T_0.

c) بين أنَّ $T\to T_e$ عندما $t\to\infty$.

d) نفترض أنَّ لدينا سبيكة خرجت من فرن الحداد ولها درجة حرارة 680°C إلى غرفة درجة حرارتها 40°C. تترك فتبرد وتصل حرارتها إلى 200°C خلال ثماني ساعات. كم ساعة ستحتاج لتبرد من 680°C إلى 50°C؟ (من الأسهل تتبع فرق الحرارة $T-T_e$، بدلا من T. يخضع الفرق في درجة الحرارة إلى تناقص أسّي.)

e) نفترض أن السبيكة عند °1000 تبرد إلى °800 في ساعة واحدة وإلى °700 في ساعتين. أوجد درجة حرارة الهواء المحيط.

f) بين أنَّ $y(t)=T(t-t_0)$ أيضاً تحقق قانون نيوتن للتبريد من أجل أي ثابت t_0. اكتب المعادلة من أجل $T(t-t_0)$ وبين أنَّها المعادلة نفسها في E10/17 من أجل $y(t)$ بتحديد الثوابت k، T_e و T_0 مع قيمها الموافقة في المعادلة المبينة في E10/17.

3F-5*

الضغط الهوائي يحقق المعادلة التفاضلية $dp/dh=-(.13)p$ ، حيث h الارتفاع عن مستوى البحر مقاساً بالكيلومترات.

a) عند مستوى البحر يكون الضغط $1\,\text{kg/cm}^2$. حل المعادلة وأوجد الضغط على قمة جبل إفرست (10 km).

b) أوجد الفرق في الضغط بين أعلى وأسفل مبنى (باعتبار أن طوله 100 متر بدءاً من مستوى البحر.) احسب القيمة العددية باستعمال الآلة الحاسبة. ثم استعمل بدلاً من هذا التقريب الخطي لـ e^x قرب $x=0$ لتقدير النسبة المئوية لانخفاض الضغط من أسفل إلى أعلى المبنى.

c) استعمل التقريب الخطي $\Delta p\approx p'(0)\Delta h$ واحسب $p'(0)$ مباشرة من المعادلة التفاضلية لإيجاد الانخفاض في الضغط من أسفل إلى أعلى المبنى. لاحظ أنَّ هذا يعطي الإجابة حتى دون معرفة حل

المعادلة التفاضلية. قارن بالتقريب في الجزء (b). ماذا سيعطي التقريب الخطي $p'(0)\Delta h$ بالنسبة إلى الضغط عند قمة جبل إفرست؟

d) ما هي المعادلة التفاضلية من أجل p إذا كان الارتفاع مقاساً بالأمتار بدلاً من الكيلومترات؟

3F-6

ليكن $y=\cos^3 u-3\cos u,$ ، $x=\sin^4 u$. أوجد dy ، dx و dy/dx . بسِّط.

3F-7

قم بحل:

a) $y'=-xy$ $y(0)=1$ b) $\cos x\sin y dy=\sin x dx$ ، $y(0)=0$.

3F-8

a) أوجد كل المنحنيات المستوية التي يقطع من أجلها الخط المماسي عند P محور الـ x على بعد وحدة واحدة إلى يسار نقطة الإسقاط لـ P على محور الـ x .

b) أوجد كل المنحنيات المستوية في الربع الأول بحيث أن من أجل أي نقطة P على المنحنى، فإن P تقع في منتصف الجزء من المستقيم المماسي عند P الموجود في الربع الأول.

3G. التكامل العددي

3G-1

أوجد التقريبات للتكاملات التالية باستعمال 4 قطاعات حسب مجموع ريمان من اليسار، باستعمال قاعدة شبه المنحرف، وباستعمال قاعدة سيمبسون. أعط أيضاً التقريب العددي للقيم الدقيقة للتكاملات المعطاة لملاحظة ما مدى صحة هذه الطرق.

a) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx (=2/3)$ b) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx (=2.)$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} (=\pi/4;$ الوحدة 5$)$ d) $\int_1^2 \frac{dx}{x} (=\ln 2)$

3G-2

بيِّن أنَّ القيمة المعطاة بقاعدة سيمبسون لمقطعين للتكامل

$$\int_0^b f(x)dx$$

تعطي الإجابة الدقيقة عندما $f(x)=x^3$. (حيث كثير الحدود التكعيبي هو مجموعة كثير حدود تربيعي وكثير حدود ax^3 ، وقاعدة سيمبسون صحيحة من أجل أي كثير حدود تربيعي، نتائج هذا التمرين تتضمن اعتماداً على الخطية (ملحق المحاشرة 20- PI) على أنَّ قاعدة سيمبسون ستكون أيضاً دقيقة من أجل أي كثير حدود تكعيبي.)

3G-3

استعمل قاعدة شبه المنحرف لتقدير $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{10{,}000}$.

هل يكون تقديرك أكبر أو أصغر من القيمة الصحيحة؟

3G-4

استعمل قاعدة شبه المنحرف لتقدير مجموع المقلوبات لأول n عدد طبيعي.

هل يكون تقديرك أكبر أو أصغر من القيمة الصحيحة؟

3G-5

إذا استعملت قاعدة شبه المنحرف لتقدير القيمة $\int_a^b f(x)dx$ ، فحسب أي فرضية لـ $f(x)$ سيكون التقدير صغير جداً؟ كبير جداً؟

الوحدة 3. حل مسائل التكامل

3A. الاشتقاق، التكامل غير المحدد

3A-1

a) $7x^6dx$. ($d(\sin 1)=0$ لأن $\sin 1$ ثابت.)

b) $(1/2)x^{-1/2}dx$

c) $(10x^9-8)dx$

d) $(3e^{3x}\sin x-e^{3x}\cos x)dx$

e) $(1/2\sqrt{x})dx+(1/2\sqrt{y}dy)=0$ يعني

$$dy=-\frac{1/2\sqrt{x}dx}{1/2\sqrt{y}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}dx=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

3A-2

a) $(2/5)x^5+x^3+x^2/2+8x+c$

b) $(2/3)x^{3/2}+2x^{1/2}+c$

c) الطريقة 1 (طريقة بطيئة) بالتعويض: $u=8+9x$، $du=9dx$. وبالتالي

$$\int\sqrt{8+9x}dx=\int u^{1/2}(1/9)dx=(1/9)(2/3)u^{3/2}+c=(2/27)(8+9x)^{3/2}+c$$

الطريقة 2 (قدِّر ثم تحقق): من الأسرع في كثير من الأحيان أن تقدر شكل الدالة الأصلية ثم تسعى لمعرفة العامل الثابت:

لتكن: $(8+9x^{3/2})$؛ إذاً $\frac{d}{dx}(8+9x)^{3/2}=(3/2)(9)(8+9x)^{1/2}=\frac{27}{2}(8+9x)^{1/2}$.

إذن بضرب ما قَدرْتَه بـ $\frac{2}{27}$ للحصول على القيمة الصحيحة للمشتقة؛ يكون الجواب:

$$\frac{2}{27}(8+9x)^{3/2}+c$$

d) الطريقة 1 (الطريقة البطيئة) استعمل التعويض: $u=1-12x^4$ ، $du=-48x^3dx$.

$$\int x^3\left(1-12x^4\right)^{1/8}dx=\int u^{1/8}(-1/48)du=-\frac{1}{48}(8/9)u^{9/8}+c=-\frac{1}{54}\left(1-12x^4\right)^{9/8}+c$$

الطريقة 2 (قدِّر ثم تحقق): قدِّر $\left(1-12x^4\right)^{9/8}$ ؛

$$\frac{d}{dx}\left(1-12x^4\right)^{9/8}=\frac{9}{8}\left(-48x^3\right)\left(1-12x^4\right)^{1/8}=-54\left(1-12x^4\right)^{1/8}$$

اضرب التقدير في $-\frac{1}{54}$ لجعل الدالة الأصلية صحيحة، وستحصل على الإجابة السابقة.

e) الطريقة 1 (الطريقة البطيئة): استعمل التعويض: $u=8-2x^2$ ، $du=-4xdx$.

$$\int\frac{x}{\sqrt{8-2x^2}}dx=\int u^{1/2}(-1/4)du=-\frac{1}{4}\frac{2}{3}u^{3/2}+c=-\frac{1}{6}\left(8-2x^2\right)^{3/2}+c$$

الطريقة 2 (قدِّر ثم تحقق): قدر $\left(8-2x^2\right)^{3/2}$ ؛ باشتقاقها

$$\frac{d}{dx}\left(8-2x^2\right)^{3/2}=\frac{3}{2}\left(-4x^2\right)\left(8-2x^2\right)^{1/2}=-6\left(8-2x^2\right)^{1/2}$$

اضرب التقدير في $-\frac{1}{6}$ للحصول على مشتق صحيح.

يجب عليك أن تقوم بالأسئلة الأربعة التالية ذهنياً (بالطريقة 2). أكتب الشكل الصحيح للحل وصحح المعامل في بداية العبارة.

f) $(1/7)e^{7x}+c$

g) $(7/5)e^{x^5}+c$

h) $2e^{\sqrt{x}}+c$

i) $(1/3)\ln(3x+2)+c$. للمقارنة، لنرى مدى بطء التعويض:

$u = 3x+2$ ، $du = 3dx$ إذاً

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \int \frac{(1/3)du}{u} = (1/3)\ln u + c = (1/3)\ln(3x+2) + c$$

j) $\int \frac{x+5}{x}dx = \int \left(1+\frac{5}{x}\right)dx = x + 5\ln x + c$

k) $\int \frac{x}{x+5}dx = \int \left(1-\frac{5}{x+5}\right)dx = x + 5\ln(x+5) + c$

هذا النوع من الخدع الجبرية سيشرح بالتفصيل في الوحدة 5 كجزء من طريقة عامة. ما يميز الجبر في كل من (j) و (k) هو خوارزمية القسمة الطويلة لكثيرات الحدود.

l) $u = \ln x$ ، $du = dx/x$ ، إذن

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = (1/2)u^2 + c = (1/2)(\ln x)^2 + c$$

m) $u = \ln x$ ، $du = dx/x$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(\ln x) + c$$

3A-3

a) $-(1/5)\cos(5x) + c$

b) $(1/2)\sin^2 x + c$ ، نتجت عن التعويض $u = \sin x$ أو $-(1/2)\cos^2 x + c$ ، نتجت عن التعويض $u = \cos x$. الدالتين $(1/2)\sin^2 x$ و $-(1/2)\cos^2 x$ ليستا متشابهتين. وبالرغم من هذا فإن الإجابتين الناتجتين متشابهتان. لماذا؟ (أنظر 1J-1 (m).)

c) $-(1/3)\cos^3 x + c$

d) $-(1/2)(\sin x)^{-2} + c = -(1/2)\csc^2 x + c$

e) $5\tan(x/5) + c$

f) $(1/7)\tan^7 x + c$

g) $u = \sec x$ ، $du = \sec x \tan x dx$ ،

$$\int \sec^9 x \tan x dx \int (\sec x)^8 \sec x \tan x dx = (1/9)\sec^9 x + c$$

3B. التكاملات غير المحددة

3B-1

a) $1+4+9+16=30$ 　 b) $2+4+8+16+32+64=126$

c) $-1+4-9+16-25=-15$ 　 d) $1+1/2+1/3+1/4=25/12$

3B-2

a) $\sum_{n=1}^{6}(-1)^{n+1}(2n+1)$ 　 b) $\sum_{k=1}^{n}1/k^2$ 　 c) $\sum_{n=1}^{n}\sin(kx/n)$

3B-3

a)

المجموع العلوي= المجموع على اليمين $=15/128=(1/4)\left[(1/4)^3+(2/4)^3+(3/4)^3+(4/4)^3\right]$

المجموع السفلي=المجموع على اليسار $= 7/128=(1/4)\left[0^3+(1/4)^3+(2/4)^3+(3/4)^3\right]$

b)

المجموع على اليسار $= 6=(-1)^2+0^2+1^2+2^2$ ؛

المجموع على اليمين $= 14=0^2+1^2+2^2+3^2$ ؛

المجموع من الأعلى $= 15=(-1)^2+1^2+2^2+3^2$ ؛

المجموع من الأسفل$=5=0^2+0^2+1^2+2^2$.

c)

المجموع على اليسار$=0=(\pi/2)[0+1+0-1]=(\pi/2)[\sin 0+\sin(\pi/2)+\sin(\pi)+\sin(3\pi/2)]$

المجموع على اليمين$=0=(\pi/2)[0+0-1+0]=(\pi/2)[\sin(\pi/2)+\sin(\pi)+\sin(3\pi/2)+\sin(2\pi)]$

المجموع من الأعلى$=\pi=(\pi/2)[1+1+0+0]=(\pi/2)[\sin(\pi/2)+\sin(\pi/2)+\sin(\pi)+\sin(2\pi)]$

المجموع من الأسفل$=-\pi=(\pi/2)[0+0-1-1]=(\pi/2)[\sin(0)+\sin(\pi)+\sin(3\pi/2)+\sin(3\pi/2)]$

3B-4

كل من x^2 و x^3 عبارة عن دالة متزايدة عند $0 \le x \le b$، إذن المجموع العلوي هو المجموع على اليمين والمجموع من الأسفل هو المجموع على اليسار. الفرق بين مجموع رايمان على اليمين وعلى اليسار هو

$$(b/n)[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]-(b/n)[f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})]=(b/n)[f(x_n)-f(x_0)]$$

في الحالتين كلتيهما $x_n = b$ و $x_0 = 0$، إذن الصيغة هي:

$$(b/n)(f(b)-f(0))$$

a) $(b/n)(b^2-0)=b^3/n$. نعم، يؤول هذا إلى الصفر عندما $n \to \infty$

b) $(b/n)(b^3-0)=b^4/n$. نعم، يؤول هذا إلى الصفر عندما $n \to \infty$

3B-5

عبارة عن مجموع ريمان على اليمين للتكامل.

$$\int_0^1 \sin(bx)dx = -(1/b)\cos(bx)\Big|_0^1 = (1-\cos b)/b$$

وهي شكل النهاية.

3C. النظرية الأساسية للحساب

3C-1

$$\int_3^6 (x-2)^{-1/2}dx = 2(x-2)^{1/2}\Big|_3^6 = 2\left[(4)^{1/2}-1^{1/2}\right] = 2$$

3C-2

a) $(2/3)(1/3)(3x+5)^{3/2}\Big|_0^2 = (2/9)\left(11^{3/2}-5^{3/2}\right)$

b) إذا كان $n \neq -1$، إذن

$$(1/(n+1))(1/3)(3x+5)^{n+1}\Big|_0^2 = (1/3(n+1))\left(\left(11^{n+1}-5^{n+1}\right)\right)$$

إذا كان $n=-1$، فإن الإجابة هي $(1/3)\ln(11/5)$.

c) $$(1/2)(\cos x)^{-2}\Big|_{3\pi/4}^{\pi} = (1/2)\left[(-1)^{-2}-\left(-1/\sqrt{2}\right)^{-2}\right] = -1/2$$

3C-3

a) $(1/2)\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2 = (1/2)[\ln 5-\ln 2] = (1/2)\ln(5/2)$

b) $(1/2)\ln\left(x^2+b^2\right)\Big|_b^{2b} = (1/2)\left[\ln\left(5b^2\right)-\ln\left(2b^2\right)\right] = (1/2)\ln(5/2)$

3C-4

عندما $b\to\infty$،

$$\int_1^b x^{-10}dx = -(1/9)x^{-9}\Big|_1^b = -(1/9)\left(b^{-9}-1\right) \to -(1/9)(0-1) = 1/9$$

يمثل هذا التكامل مساحة المنطقة غير المحدودة بين المنحنى $y=x^{-10}$ والمحور x من أجل $x>0$.

3C-5

a) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$

b) $\int_0^{\pi/a} \sin(ax)dx = -(1/a)\cos(ax)\Big|_0^{\pi/a} = -(1/a)(\cos\pi - \cos 0) = 2/a$

3C-6

a) $x^2 - 4 = 0$ تعني أن $x = \pm 2$. إذن المساحة هي:

$$\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx = 2\int_0^2 (x^2-4)dx = \frac{x^3}{3} - 4x\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4\cdot 2 = -16/3$$

(غيرنا إلى المجال $(0,2)$ وضاعفنا التكامل لأن x^2-4 زوجي.) لاحظ أنَّ التكامل يعطي الإجابة الخطأ! إنه سالب. هذا لأن منحنى $y = x^2-4$ مقعر من الأعلى ويقع تحت المحور x في المجال $-2 < x < 2$. إذاً فإن الإجابة الصحيحة هي $16/3$.

b) بمتابعة الطلب (a)، $x^2 - a = 0$ يعني $x = \pm\sqrt{a}$. فتكون المساحة:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx = 2\int_a^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx = 2ax - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a^{3/2} - \frac{a^{3/2}}{3}\right) = \frac{4}{3}a^{3/2}$$

3D. النظرية الأساسية الثانية

3D-1

a) قم باشتقاق الطرفين كليهما

الطرف الأيسر $L(x)$: $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = L'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{a^2+x^2}}$ حسب النظرية الأساسية الثانية؛

الطرف الأيمن $R(x)$: $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = R'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)-\ln a\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$

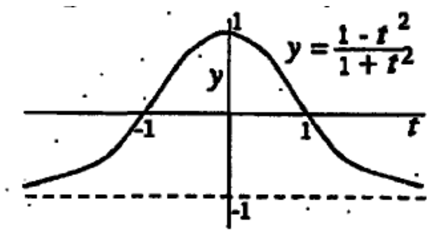
بما أنَّ $L'(x)=R'(x)$، لدينا $L(x)=R(x)+C$ من أجل ثابت معين $C=L(x)-R(x)$. يمكن تقييم الثابت C بإرفاق القيمة بـ x؛ الاختيار الأكثر ملائمة هو $x=0$، ما يعطي

$L(0)\int_0^0 = 0$؛ $R(0)=\ln\left(0+\sqrt{0+a^2}\right)-\ln a=0$؛ وبالتالي فإن $C=0$ و $L(x)=R(x)$.

b) ضع $x=c$؛ تصبح المعادلة $0=\ln\left(c+\sqrt{c^2+a^2}\right)$؛ حل هذا من أجل c أولاً برفع الطرفين كليهما إلى الأس: $1=c+\sqrt{c^2+a^2}$؛ ثم اطرح c وقم بتربيع الطرفين كليهما؛ بعد القيام بالقليل من العمليات الجبرية نحصل على $c=\frac{1}{2}\left(1-a^2\right)$.

3D-3

ارسم المنحني $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ أولاً، كما هو مبين أدناه.



3D-4

a) $\int_0^x \sin(t^3)dt$ ، انطلاقاً من النظرية الأساسية الثانية.

b) $\int_0^x \sin(t^3)dt + 2$

c) $\int_1^x \sin(t^3)dt - 1$

3D-5

هذه المسألة تعيد النظر في فكرة البرهان في النظرية الأساسية الثانية.

a) $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}}$

$$\text{الإرتفاع} = \frac{\text{المساحة المظللة}}{\text{العرض}} = \frac{1}{\Delta x}\int_1^{1+\Delta x} f(x)dt$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_1^{1+\Delta x} f(x)dt = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{المساحة المظللة}}{\text{العرض}} = \text{الارتفاع} \quad = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) انطلاقاً من تعريف المشتقة،

$$F'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(1+\Delta x)-F(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_1^{1+\Delta x} f(t)dt \text{ ؛}$$

انطلاقا من النظرية الأساسية الثانية $F'(1) = f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3D-6

a) إذا كانت $F_1(x) = \int_{a_1}^x dt$ و $F_2(x) = \int_{a_2}^x dt$ ، إذن $F_1(x) = x - a_1$ و $F_2(x) = x - a_2$.

بحيث $F_1(x) - F_2(x) = a_2 - a_1$ ، a ثابت.

b) باستعمال النظرية الأساسية الثانية، $F_1'(x)=f(x)$ و $F_2'(x)=f(x)$؛ وبالتالي فإن $F_1=F_2+C$، من أجل ثابت معين C.

3D-7

a) باستعمال النظرية الأساسية الثانية وقاعدة السلاسل، كما في الملحقات،

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{u}\sin u\,du=\sqrt{x^2}\sin\left(x^2\right)\cdot\frac{d\left(x^2\right)}{dx}=2x^2\sin\left(x^2\right)$$

b) $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=1$. (إذن $\int_0^{\sin x}\frac{dt}{1-t^2}=x$)

c) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\tan u\,du=\tan\left(x^2\right)\cdot 2x-\tan x$

3D-8

a) باشتقاق الطرفين كليهما باستعمال النظرية الأساسية الثانية، وتعويض $x=\pi/2$: $f(\pi/2)=4$.

b) بتعويض $x=2u$ واتباع طريقة الطلب (a)؛ ضع $u=\pi$، واحصل في النهاية على $f(\pi/2)=4-4\pi$.

3E. تغيير المتغيرات؛ تقييم التكاملات

3E-1

$L\left(\frac{1}{a}\right)=\int_1^{1/a}\frac{dt}{t}$. ضع $t=\frac{1}{u}$، $dt=-\frac{1}{u^2}du$. إذن

$$\frac{dt}{t}=-\frac{u}{u^2}du \quad\Rightarrow\quad L\left(\frac{1}{a}\right)=\int_1^{1/a}\frac{dt}{t}=-\int_1^{a}\frac{du}{u}=-L(a)$$

3E-2

a) نريد $-t^2=-u^2/2$، إذن $u=t\sqrt{2}$، $du=\sqrt{2}dt$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}}e^{-t^2}\sqrt{2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}}e^{-t^2}dt$$

$$\Leftarrow E(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}F\left(x/\sqrt{2}\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}E(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2}$$

b) حدود التكامل زوجية، إذن

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-u^2/2}du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{N}e^{-u^2/2}du=2E(N)\to 1 \qquad \text{عندما } N\to\infty$$

$\lim_{x\to\infty}E(x)=-1/2$ لأن $E(x)$ فردي

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du=E(b)-E(a)$ من النظرية الأساسية الأولى أو "إضافة القطاعات" كما في ملحق المحاضرة 20 PI (3)

ملاحظة: الإجابة متوافق مع النهاية،

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-u^2/2}du=E(N)-E(-N)=2E(N)\quad\to 1 \qquad \text{عندما } N\to\infty$$

3E-3

a) باستعمال $u=\ln x$ ، $du=\dfrac{dx}{x}$ ، $\int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_0^1 \sqrt{u}du=\dfrac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$.

b) باستعمال $u=\cos x$ ، $du=-\sin x$ ،

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(2\cos x)^3}dx=\int_1^{-1}\frac{-du}{(2+u)^3}=\frac{1}{2(2+u)^2}\Bigg|_1^{-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{4}{9}..$$

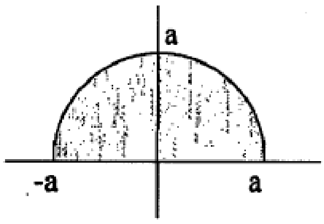
c) باستعمال $x=\sin u$ ، $dx=\cos u du$ ، $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos u}{\cos u}du=u\Big|_0^{\pi/2}=\dfrac{\pi}{2}$.

3E-4

بتعويض $x=t/a$ ؛ ثم $x=\pm 1 \Rightarrow t=\pm a$. يكون لدينا:

$$\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\frac{dt}{a}=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}dt$$

الضرب بـ a^2 يعطي القيمة $\pi a^2/2$ بالنسبة إلى التكامل، والذي يتحقق طالما يمثل التكامل مساحة نصف الدائرة.



3E-5

يمكننا اعتماد منطق مُبَسط يعتمد على المساحات (كما في المسألة 5، ملحق المحاضرة FT 20 الخاص بالنظرية الأساسية)، لكن من الأفضل استعمال تغيير المتحول.

a) الهدف: $F(-x)=-F(x)$. لتكن $t=-u$ ، $dt=-du$ ، إذن

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^{x}f(-u)(-du)$$

بما أنَّ f زوجي $(f(-u)=f(u))$، $F(-x)=-\int_0^x f(u)du=-F(x)$.

b) الهدف: $F(-x)=F(x)$. لتكن $t=-u$، $dt=-du$، إذن

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x f(-u)(-du)$$

بما أنَّ f فردي $(f(-u)=-f(u))$، $F(-x)=\int_0^x f(u)du=F(x)$.

3E-6

a) $x^3<x$ عند $(0,1)$ يؤدي $\frac{1}{1+x^3}>\frac{1}{1+x}$ ⇐ عند $(0,1)$؛ وبالتالي:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}>\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2=.69$$

b) $0<\sin x<1$ على $(0,\pi)$ ⇐ $\sin^2 x<\sin x$ على $(0,\pi)$؛ وبالتالي

$$\int_0^\pi \sin^2 xdx<\int_0^\pi \sin xdx=-\cos x\Big|_0^\pi=-(-1-1)=2$$

c) $$\int_{10}^{20}\sqrt{x^2+1}dx>\int_{10}^{20}\sqrt{x^2}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{20}=\frac{1}{2}(400-100)=150$$

3E-7

$$\left|\int_1^N \frac{\sin x}{x^2}dx\right|\le\int_1^N \frac{|\sin x|}{x^2}dx\le\int_1^N \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^N=-\frac{1}{N}+1<1$$

3F. المعادلات التفاضلية: فصل المتغيرات. تطبيقات

3F-1

a) $y=(1/10)(2x+5)^5+c$

b) $(y+1)dy=dx \Rightarrow \int(y+1)dy= \int dx \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(y+1)2=x+c$

يمكنك ترك هذا في الشكل الضمني أو الحل من أجل y: $y=-1\pm\sqrt{2x+a}$ من أجل أي ثابت a ($a=2c$)

c) $y=(9x/2+a)^{2/3} \Rightarrow (2/3)y^{3/2}=3x+c \Rightarrow y^{1/2}dy=3dx$ ، مع $a=(3/2)c$

d) $y=-1(x^2/2+c) \Rightarrow -y^{-1}=x^2/2+c \Rightarrow y^{-2}dy=xdx$.

3F-2

a) الإجابة $3e^{16}$.

$$y^{-1}dy=4xdx \Rightarrow \ln y=2x^2+c$$

$$y(1)=2 \Rightarrow \ln 3=2+c \Rightarrow c=\ln 3-2.$$

وبالتالي فإن

$$\ln y=2x^2+(\ln 3-2)$$

عند $x=3$ ، $y=e^{18+\ln 3-2}=3e^{16}$

b) الإجابة: $y=11/2+3\sqrt{2}$.

$$(y+1)^{1/2}dy=dx \Rightarrow 2(y+1)^{1/2}=x+c$$

$$y(0)=1 \Rightarrow 2(1+1)^{1/2}=c \Rightarrow c=2\sqrt{2}$$

عند $x=3$ ،

$$2(y+1)^{1/2}=3+2\sqrt{2} \Rightarrow y+1=\left(3/2+\sqrt{2}\right)^2=13/2+3\sqrt{2}$$

بحيث، $y = 11/2 + 3\sqrt{2}$.

c) الإجابة: $y = \sqrt{550/3}$

$$ydy = x^2dx \rightarrow y^2/2 = (1/3)\, x^3 + c$$

$$y(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 10^2/2 = 50$$

وبالتالي فإنه عند $x = 5$،

$$y^2/2 = (1/3)5^3 + 50 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{550/3}$$

d) الإجابة: $y = (2/3)(e^{24} - 1)$

$$(3y+2)^{-1}dy = dx \quad \Rightarrow \quad (1/3)\ln(3y+2) = x + c$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1/3)\ln 2 = c$$

وبالتالي فإنه عند $x = 8$،

$$(1/3)\ln(3y+2) = 8 + (1/3)\ln 2 \Rightarrow \quad \ln(3y+2) = 24 + \ln 2 \quad \Rightarrow \quad (3y+2) = 2e^{24}$$

وبالتالي فإنَّ، $y = (2e^{24} - 2)/3$

e) الإجابة: $y = -\ln 4$ عند $x = 0$. معرفة من أجل $-\infty < x \le 4$.

$$e^{-y}dy = dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = x + c$$

$$y(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -e^{0} = 3 + c \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

و بالتالي فإن

$$y = -\ln(4-x)\text{، } y(0) = -\ln 4$$

الحل y معرف فقط إذا كانت $x < 4$.

3F-3

a) الإجابات: $y(1/2)=2$ ، $y(-1)=1/2$ ، $y(1)$ غير معرفة.

$$y^{-2}dy = dx \quad \Rightarrow \quad -y^{-1} = x + c$$

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad -1 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

و بالتالي، $-1/y = x-1$ و

$$y = \frac{1}{1-x}$$

والقيم هي $y(1/2)=2$ ، $y(-1)=-1/2$ و y غير معرف عند $x=1$.

b) بالرغم من أنَّ للصيغة y معنى عند x=3/2 ، حيث (y(3/2) = 1/(1-3/2) = -2) ، فإنها غير متماشية مع تفسير معدل التغير للمعادلة التفاضلية. الدالة معرّفة، مستمرة وقابلة للاشتقاق بالنسبة إلى $-\infty < x < 1$. لكن عند x=1 فإن y وdy/dx غير معرّفتين. بما أنَّ y= 1/(1-x) هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية في المجال (1،0) الذي يلبي الشرط الابتدائي y(0) =1 ، فإنه من غير الممكن تعريف دالة لها الشرط الابتدائي y(0) =1 وتحقق أيضاً المعادلة التفاضلية في أي مجال أطول يتضمن x=1.

للسؤال عما يحصل لـ y بعد $x=1$ ، لنقل عند $x=3/2$ ، مثلاً، هذا من قبيل السؤال عما يحصل لصاروخ عندما يسقط في ثقب أسود. ما من سبب واضح لماذا يختار أحدنا الصيغة $y=1/(1-x)$ بعد "الانفجار". على سبيل المثال، يمكن لأحدنا تعريف $y=1/(2-x)$ من أجل $1 \le x < 2$. في الحقيقة، أية صيغة $y=1/(c-x)$ من أجل $c \ge 1$ تحقق شرط المعادلة التفاضلية عند كل نقطة $x>1$.

3F-4

a) إذا كان الهواء المحيط أبرد $(T_e - T < 0)$، فإن الجسم سيبرد، بحيث $dT/dt < 0$. بحيث $k>0$.

b) افصل المتغيرات واحسب التكامل.

$$(T-T_e)^{-1}dT = -kdt \quad \Rightarrow \quad \ln|T-T_e| = -kt + c$$

الرفع إلى الأس،

$$T - T_e = \pm e^c e^{-kt} = Ae^{-kt}$$

الشرط الابتدائي $T(0) = T_0$ يعني $A = T_0 - T_e$. بحيث

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-kt}$$

c) بما أنَّ $k > 0$، $e^{-kt} \to 0$ عندما $t \to \infty$. وبالتالي :

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-kt} \to T_e$$

عندما $T \to \infty$

d) $T - T_e = (T_0 - T_e)e^{-kt}$

المعطيات هي $T_0 = 680$، $T_e = 40$ و $T(8) = 200$. وبالتالي :

$$200 - 40 = (680 - 40)e^{-8k} \quad \Rightarrow \quad e^{-8k} = 160/640 = 1/4 \Rightarrow \quad -8k = -\ln 4$$

عدد الساعات t التي يأخذها ليبرد إلى $50°$ يحقق المعادلة :

$$50 - 40 = (640)e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad e^{-kt} = 1/64 \quad \Rightarrow \quad -kt = -3\ln 4.$$

لحل المعادلتين على اليمين أعلاه في الوقت نفسه من أجل t، من الأسهل قسمة المعادلة السفلى على المعادلة العليا، ما يعطي:

$$\frac{t}{8} = 3 \text{، } t = 24.$$

e)

$$T - T_e = (T_0 - T_e)e^{-kt}$$

المعطيات عند $t = 1$ و $t = 2$ هي:

$$800 - T_e = (1000 - T_e)e^{-k} \text{ و } 700 - T_e = (1000 - T_e)e^{-2k}$$

بحذف e^{-k} من هاتين المعادلتين يعطي:

$$\frac{700-T_e}{1000-T_e}=\left(\frac{800-T_e}{1000-T_e}\right)^2$$

$$(800-T_e)^2=(1000-T_e)(700-T_e)$$

$$800^2-1600T_e+T_e^2=(1000)(700)-1700T_e+T_e^2$$

$$100T_e=(1000)(700)-800^2$$

$$T_e=7000-6400=600$$

f) لتأكيد المعادلة التفاضلية:

$$y'(t)=T'(t-t_0)=k(T_e-T(t-t_0))=k(T_e-y(t))$$

المعادلة من أجل y هي:

$$y(t)=T(t-t_0)=T_e+(T_0-T_e)e^{-k(t-t_0)}=a+(y(t_0)-a)e^{-c(t-t_0)}$$

مع $k=c$، $T_e=a$ و $T_0=T(0)=y(t_0)$.

3F-6

$x=\sin^4 u$ ، $y=\cos^3 u-3\cos u$

$dx=4\sin^3 u\cos u\,du$ ، $dy=(3\cos^2 u\cdot(-\sin u)+3\sin u)du$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin u(1-\cos^2 u)}{4\sin^3 u\cos u}=\frac{3}{4\cos u}$$

3F-7

a) $y'=-xy$ ؛ $y(0)=1$

dy/y = -x dx ➔ ln y = -1/2 x^2 + c

لإيجاد c، ضع $x=0$، $y=1$: $c=0 \quad \Rightarrow \quad \ln 1=0+c$.

$$\Rightarrow \ln y=-\frac{1}{2}x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y=e^{-x^2/2}$$

b) $\cos x\sin y dy=\sin x dx$؛ $y(0)=0$

$$\sin y dy=\frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \Rightarrow \qquad -\cos x=-\ln(\cos x)+c$$

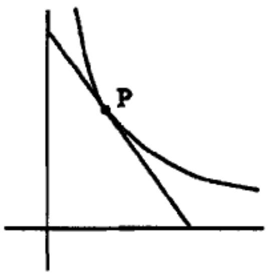
لإيجاد c: ضع $x=0$، $y=0$: $c=-1 \qquad \Rightarrow \qquad -\cos 0=-\ln(\cos 0)+c$

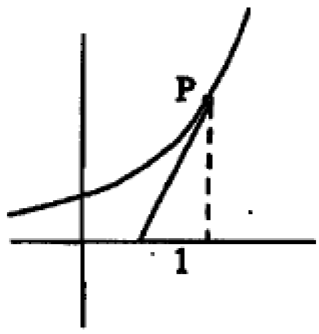
$$\Rightarrow \cos y=\ln(\cos x)+1$$

3F-8

a) من المثلث، $y'=$ ميل المماس$=\frac{y}{1}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y=x+c_1 \qquad \Rightarrow \qquad y=e^{x+c_1}=Ae^x \qquad \left(A=e^{c_1}\right)$$





b) إذا كانت P تقطع الخط المماسي، إذاً P_0 تقطع OQ (حسب هندسة إقليدس) إذاً $P_0Q=x$ (بما أنَّ $OP_0=x$).

ميل المماس $\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y'=\frac{-y}{x}$

$$\Leftarrow \qquad \ln y=-\ln x+c_1$$

بالرفع إلى الأس: $\frac{c}{x} = \frac{1}{e} \cdot e^{c_1}$ ، $y = \frac{1}{e} \cdot e^{c_1}$، $c > 0$.

الإجابة: القطع المكافئ $y = \frac{c}{x}$، $c > 0$.

3G. التكامل العددي

3G-1

مجموع ريمان على اليسار: $(\Delta x)(y_0+y_1+y_2+y_3)$

قاعدة شبه المنحرف: $(\Delta x)((1/2)y_0+y_1+y_2+y_3+(1/2)y_4)$

قاعدة سيمبسون: $(\Delta x/3)(y_0+4y_1+2y_1+4y_3+y_4)$

a) $\Delta x=1/4$ و

$y_0=0$ ، $y_1=1/2$ ، $y_2=1/\sqrt{2}$ ، $y_3=\sqrt{3}/2$ ، $y_4=1$.

مجموع ريمان على اليسار: $(1/4)(0+1/2+1/\sqrt{2}+\sqrt{3}/2)\approx .518$

قاعدة شبه المنحرف: $(1/4)((1/2)\cdot 0+1/2+1/\sqrt{2}+\sqrt{3}/2+(1/2)1)\approx .643$

قاعدة سيمبسون: $(1/12)(1\cdot 0+4(1/2)+2(1/\sqrt{2})+2(1/\sqrt{2})+4(\sqrt{3}/2)+1)\approx .657$

مقارنة بالجواب الدقيق: ...0.0666

b) $\Delta x=\pi/4$

$y_0=0$ ، $y_1=1/\sqrt{2}$ ، $y_2=1$ ، $y_3=1/\sqrt{2}$ ، $y_4=0$.

مجموع ريمان على اليسار: $(\pi/4)\ (0+1/\sqrt{2}+1+1/\sqrt{2})\approx 1.896$

قاعدة شبه المنحرف: $(\pi/4)\ ((1/2).0+1/\sqrt{2}+1+1/\sqrt{2}+(1/2).0)\approx 1.896$

وهذا ما وجدناه في مجموع ريمان.

قاعدة سيمبسون: $(\pi/12)(1\cdot 0+4(1/\sqrt{2})+2(1)+4(1/\sqrt{2})+1\cdot 0)\approx 2.005$

مقارنة مع الجواب الدقيق 2

c) $\Delta x=1/4$

$y_0=1$ ، $y_1=16/17$ ، $y_2=4/5$ ، $y_3=16/25$ ، $y_4=1/2$

مجموع ريمان على اليسار: $(1/4)(1+16/17+4/5+16/25)\approx .845$

قاعدة شبه المنحرف: $(1/4)((1/2)\cdot 1+16/17+4/5+16/25+(1/2)(1/2))\approx .8128$

قاعدة سيمبسون: $(1/12)(1\cdot 1+4(16/17)+2(4/5)+4(16/25)+1(1/2))\approx .785392$

مقارنة بالإجابة الدقيقة $\pi/4\approx .785398$

(بضرب جواب قاعدة سيمبسون بـ 4 نحصل على تقريب مقبول لقيمة π، التي هي 3.14157، دقيقة إلى غاية 2×10^{-5}.)

d) $\Delta x=1/4$

$y_0=1$ ، $y_1=4/5$ ، $y_2=2/3$ ، $y_3=4/7$ ، $y_4=1/2$

مجموع ريمان على اليسار: $(1/4)(1+4/5+2/3+4/7)\approx .76$

قاعدة شبه المنحرف: $(1/4)((1/2)\cdot 1+4/5+2/3+4/7(1/2)(1/2))\approx .697$

قاعدة سيمبسون: $(1/12)(1\cdot 1+4(4/5)+2(2/3)+4(4/7)+1(1/2))\approx .69325$

مقارنة مع الجواب الدقيق $\ln 2\approx .69315$، قاعدة سيمبسون دقيقة بحوالي 10^{-4}

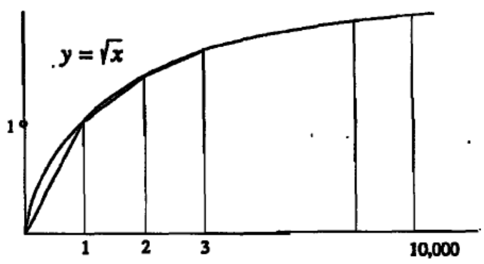
3G-2

لدينا $\int_0^b x^3dx=\frac{b^4}{4}$. باستعمال قاعدة سيمبسون مع قطاعين، $\Delta x=b/2$، بحيث نحصل على الإجابة نفسها كما سبق:

$$S(x^3)=\frac{b}{6}\left(0+4\left(\frac{b}{2}\right)^3+b^3\right)=\frac{b}{6}\left(\frac{3}{2}b^3\right)=\frac{b^4}{4}$$

ملاحظة: حقيقة أنَّ قاعدة سيمبسون دقيقة بالنسبة إلى كثيرات الحدود المكعبة معبر جداً عن فعاليتها كتقريب عددي. إنها تعني أنَّ التقريب يتقارب بمعدل متناسب مع المشتقة الرابعة للدالة مضروباً في $(\Delta x)^4$، وهي سريعة بما يكفي لأهداف عملية عدة.

3G-3



المجموع:

$$S=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{10{,}000}$$

متعلق بتقريب شبه المنحرف لـ $\int_0^{10^4}\sqrt{x}dx$

$$\int_0^{10^4}\sqrt{x}dx\approx\frac{1}{2}\sqrt{0}+\sqrt{1}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{10^4}=S-\frac{1}{2}\sqrt{10^4} \qquad (1)$$

لكن

$$\int_0^{10^4}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^{10^4}=\frac{2}{3}\cdot 10^6$$

من (1)،

$$\frac{2}{3}\cdot 10^6\approx S-50 \qquad (2)$$

و منه

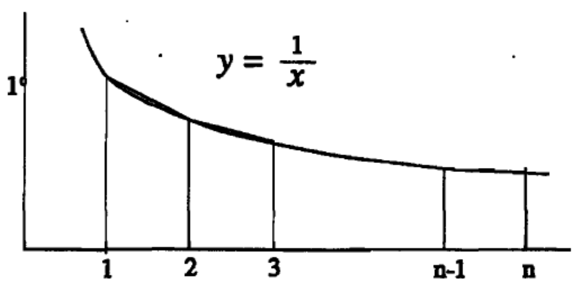
$$S\approx 666{,}717 \qquad (3)$$

في (1)، لدينا >، كما في الشكل. ومنه في (2)، لدينا <، إذن في (3)، لدينا >، عالية جداً.

3G-4

كما في المسألة 3 أعلاه ليكن

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$



إذن بقاعدة شبه المنحرف،

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}=S-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

بما أنَّ $\int_1^n \frac{dx}{x}=\ln n$ ، فإنه لدينا $S \approx \ln n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$. (التقريب ضئيل جداً)

3G-5

استنادا إلى الشكلين السابقين، يمكن لأحدنا أن يرى أنه إذا كانت $f(x)$ مقعرة إلى الأسفل على المجال $[a,b]$، فإن قاعدة شبه المنحرف تعطي تقريباً ضئيلاً جداً؛ إذا كانت $f(x)$ مقعرة إلى الأعلى، فإن قاعدة شبه المنحرف تعطي تقريباً دقيقاً جداً.