الوحدة 5. تقنيات التكامل

5A. مقلوب الدوال المثلثية؛ دوال القطع المكافئة

5A-1

احسب :

a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ b) $\sin^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$

c) إذا كانت $\theta=\tan^{-1}5$، إذن احسب $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\cot\theta$، $\csc\theta$ و $\sec\theta$.

d) $\sin^{-1}\cos(\pi/6)$ e) $\tan^{-1}\tan(\pi/3)$

f) $\tan^{-1}\tan(2\pi/3)$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$.

5A-2

احسب:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+1}$ b) $\int_b^{2b}\frac{dx}{x^2+b^2}$ c) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5A-3

احسب المشتقة بالنسبة إلى x لما يلي:

a) $\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ b) $\tanh x$

c) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ d) y حيث $\cos y=x$، $0\le 1\le 1$ و $0\le y\le\pi/2$

e) $\sin^{-1}(x/a)$ f) $\sin^{-1}(a/x)$

g) $\tan^{-1}\left(x/\sqrt{1-x^2}\right)$ h) $\sin^{-1}\sqrt{1-x}$

5A-4

a) إذا كان الخط المماسي لـ $y=\cosh x$ عند $x=a$ يمر من خلال المبدأ، ما هي المعادلة التي يجب أن تحققها a؟

b) قم بالحل من أجل a باستعمال قانون نيوتن.

5A-5

a) مثل بيانياً المنحنى $y=\sinh x$، بإيجاد النقاط الحرجة، نقاط الانعطاف، المتناظرات، والنهايات عندما $x\to\infty$ و $-\infty$.

b) قدم تعريفاً مناسباً لدالة $\sinh^{-1}x$، ومثلها بيانياً، موضحاً مجال تعريفها. (مقلوب الدالة الجيبية الزائدة.)

c) أوجد $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x$.

d) استعمل عملك لتقييم $\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

5A-6

a) أوجد القيمة المتوسطة لـ y بالنسبة إلى طول القوس على نصف الدائرة $x^2+y^2=1$، $y>0$، باستعمال الإحداثيات القطبية.

b) المتوسط المثقّل للدالة هو:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx\Big/\int_a^b w(x)$$

أعد الطلب (a) مرة أخرى وعبّر عن طول القوس كما يلي $ds=w(x)dx$. تغيير المتغيرات يتطلب تقييم البسط والمقام ويعود إلى (a).

c) أوجد متوسط الارتفاع لـ $\sqrt{1-x^2}$ على $-1<x<1$ بالنسبة إلى dx. لاحظ أنَّ هذا يختلف عن الجزء (b) في كل من البسط والمقام.

5B. التكامل بالتعويض المباشر

احسب التكاملات التالية :

5B-1 $\int x\sqrt{x^2-1}dx$

5B-2 $\int e^{8x}dx$

5B-3 $\int \frac{\ln xdx}{x}$

5B-4 $\int \frac{\cos xdx}{2+3\sin x}$

5B-5 $\int \sin^2 x\cos xdx$

5B-6 $\int \sin 7xdx$

5B-7 $\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^2+4}}$

5B-8 $\int tan4xdx$

5B-9 $\int e^x\left(1+e^x\right)^{-1/3}dx$

5B-10 $\int \sec 9xdx$

5B-11 $\int \sec^2 9xdx$

5B-12 $\int xe^{-x^2}dx$

5B-13 $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$. تلميح: جرب $u=x^3$.

احسب التكاملات التالية بالتعويض وتغيير نهايات التكاملات.

5B-14 $\int_0^{\pi/3}\sin^3 x\cos xdx$

5B-15 $\int_1^e \frac{(\ln x)^{3/2}dx}{x}$

5B-16 $\int_{-1}^1 \frac{\tan^{-1}xdx}{1+x^2}$

5C. التكاملات المثلثية

احسب التكاملات التالية:

5C-1 $\int \sin^2 x dx$

5C-2 $\int \sin^3 (x/2) dx$

5C-3 $\int \sin^4 x dx$

5C-4 $\int \cos^3 (3x) dx$

5C-5 $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

5C-6 $\int \sec^4 x dx$

5C-7 $\int \sin^2 (4x) \cos^2 (4x) dx$

5C-8 $\int \tan^2 (ax) \cos (ax) dx$

5C-9 $\int \sin^3 x \sec^2 x dx$

5C-10 $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

5C-11 $\int \sin x \cos (2x) dx$

(استعمل صيغة الزاوية المزدوجة)

5C-12 $\int_0^\pi \sin x \cos (2x) dx$ (أنظر 27.)

5C-13

أوجد طول المنحنى $y = \ln \sin x$ من أجل $\pi/4 \le x \le \pi/2$.

5C-14

أوجد حجم حدبة واحدة لـ $y = \sin ax$ بدورانه حول المحور x.

5D. التكامل بتعويض المقلوب

احسب التكاملات التالية:

5D-1 $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ **5D-2** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **5D-3** $\int \frac{(x+1)dx}{4+x^2}$

5D-4 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ **5D-5** $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,dx}{x^2}$ **5D-6** $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

(بالنسبة إلى 5D-4-6 استعمل $x = a\sinh y$، و $\cosh^2 y = (\cosh(2y)+1)/2$، $\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$)

5D-7 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx$ **5D-8** $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$

9-5D

أوجد طول القوس للدالة $y=\ln x$ من أجل $1 \le x \le b$.

إتمام المربع

احسب التكاملات التالية:

5D-10 $\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{3/2}}$

5D-11 $\int x\sqrt{-8+6x-x^2}\,dx$

5D-12 $\sqrt{-8+6x-x^2}\,dx$

5D-13 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

5D-14 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

5D-15 $\int \frac{\sqrt{4x^2-4x+17dx}}{2x-1}$

5E. التكامل بالكسور الجزئية

5E-1 $\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}dx$ **5E-2** $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+3)}dx$ **5E-3** $\int \frac{xdx}{(x^2-4)(x+3)}dx$

5E-4 $\int \frac{3x^2+4x-11}{(x^2-1)(x-2)}dx$ **5E-5** $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$ **5E-6** $\int \frac{2x-9}{(x^2+9)(x+2)}dx$

5E-7

المساواة (1) في الدروس الإضافية F صالحة من أجل $x \neq 1,-2$ ، وبالتالي، المساواة (4) أيضاً صالحة عندما تكون $x \neq 1,-2$ ، بما أنها تنتج من (1) بالضرب. لماذا يمكن تعويض $x=1$ في (4)؟

5E-8

عبّر عما يلي كمجموع كثير حدود ودالة جزئية.

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$ b) $\frac{x^3}{x^2-1}$ c) $\frac{x^3}{3x-1}$

d) $\frac{x+2}{3x-1}$ e) $\frac{x^8}{(x+2)^2(x-2)^2}$ (فقط إعط شكل الحل)

5E-9

قم بمكاملة الدوال في المسألة 5E-8.

5E-10 احسب التكاملات التالية :

a) $\frac{dx}{x^3-x}$ b) $\int \frac{(x+1)dx}{(x-2)(x-3)}$ c) $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^2+8x}$

$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^2+8x}$ (d

$\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ (e

$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+2x^2+x}$ (f

$\frac{x^3dx}{(x+1)^2(x-1)}$ (g

$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+2x+2}$ (h

5E-11

حل المعدلة التفاضلية $dy/dx = y(1-y)$.

5E-12

تبين هذه المسألة كيفية مكاملة أي دالة جزئية لـ$\sin\theta$ و $\cos\theta$ باستعمال التعويض $z=\tan(\theta/2)$. يتحول التكامل إلى دالة جزئية لـ z، التي يمكن مكاملتها باستعمال طريقة الكسور الجزئية.

a) بيّن أنَّ:

$$\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2},\quad \sin\theta = \frac{2z}{1+z^2},\quad d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

احسب التكاملات التالية باستعمال التعويض $z=\tan(\theta/2)$ من الجزء (a).

$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\sin\theta}$ (b

$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1+\sin\theta)^2}$ (c

$\int_0^\pi \sin\theta d\theta$ (d (ليس بالطريقة السهلة !)

5E-13

a) استعمل صيغة الإحداثيات القطبية للمساحة لحساب مساحة المنطقة $0 < r < 1/(1+\cos\theta)$، $0 \le \theta \le \pi/2$.

تلميح: المسألة 12 تبين كيف يُسمح لكم التعويض $z = \tan(\theta/2)$ بتكامل أي دالة جزئية للدوال المثلثية.

b) احسب هذه المساحة نفسها بالإحداثيات المستطيلية وقارن إجابتك.

5F. التكامل بالتجزئة. صيغ التقليص

احسب التكاملات التالية:

5F-1

a) $\int x^a \ln x dx \quad (a \neq -1)$

b) قيم حالة $a = -1$ بالتعويض

5F-2

a) $\int xe^x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int x^3 e^x dx$

d) اشتق الصيغة المصغرة للتعبير عن $\int x^n e^{ax} dx$ بدلالة $\int x^{n-1} e^{ax} dx$

5F-3

احسب $\int \sin^{-1}(4x) dx$

5F-4

احسب $\int e^x \cos x dx$. (التكامل بالتجزئة مرتين.)

5F-5

احسب التكامل $\int \cos(\ln x) dx$. (التكامل بالتجزئة مرتين.)

5F-6

بين كيف يغير التعويض e^x التكامل $\int x^n e^x dx$، إلى $\int (\ln t)^n dt$. استعمل طريقة التقليص لتقييم هذا التكامل.

الوحدة 5. تقنيات التكامل

5A. مقلوب الدوال المثلثية؛ دوال القطع المكافئة

5A-1

a) $\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ b) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

c) $\tan\theta = 5$ يعني أنَّ $\sin\theta = 5/\sqrt{26}$ ، $\cos\theta = 1/\sqrt{26}$ ، $\cot\theta = 1/5$ ، $\csc\theta = \sqrt{26}/5$ ، $\sec\theta = \sqrt{26}$ (من المثلث)

d) $\sin^{-1}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ e) $\tan^{-1}\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

f) $\tan^{-1}\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) = \dfrac{-\pi}{3}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\tan^{-1}x = \dfrac{-\pi}{2}$

5A-2

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x\Big|_1^2 = \tan^{-1}2 - \frac{\pi}{4}$

b) $\displaystyle\int_b^{2b} \frac{dx}{x^2+b^2} = \int_b^{2b} \frac{d(by)}{(by)^2+b^2}$ ضع $x = by$ و يساوي $\displaystyle\frac{1}{b}\left(\tan^{-1}2\frac{\pi}{4}\right) = \int_1^2 \frac{dy}{b(y^2+1)}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$

5A-3

a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ ، بحيث إنَّ $1-y^2 = 4x/(x+1)^2$ ، و $\dfrac{(x+1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. ومنه فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} y=\frac{dy/dx}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x+1)}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

(b $\operatorname{sech}^2 x=1/\cosh^2 x=4/\left(e^x+e^{-x}\right)^2$

(c $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ، $dy/dx=1+x/\sqrt{x^2+1}$.

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{dy/dx}{y}=\frac{1+x/\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(d $(-\sin y)(dy/dx)=1 \quad \Rightarrow \quad \cos y=x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin y}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(e **قاعدة السلاسل:**

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x/a)=\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(f **قاعدة السلاسل:**

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(a/x)=\frac{1}{\sqrt{1-(a/x)^2}}\cdot\frac{-a}{x^2}=\frac{-a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

(g $y=x/\sqrt{1-x^2}$ ، $dy/dx=\left(1-x^2\right)^{-3/2}$ ، $1+y^2=1/\left(1-x^2\right)$. بحيث إنَّ:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} y=\frac{dy/dx}{1+y^2}=\left(1-x^2\right)^{-3/2}\left(1-x^2\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

لماذا تساوي هذه مشتقة $\sin^{-1} x$؟

h) $y = \sqrt{x-1}$, $dy/dx = -1/2\sqrt{x-1}$, $1\text{-}y2 = x$ حيث

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} y = \frac{dy/dx}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

5A-4

a) $y' = \sinh x$. معادلة الخط المماسي المار من المبدأ هي $y = mx$. إذا التقى مع المنحنى عند $x = a$، إذن $ma = \cosh(a)$ و $m = \sinh(a)$. وبالتالي فإنَّ، $a\sinh(a) = \cosh(a)$.

b) خذ الفرق:

$$F(a) = a\sinh(a) - \cosh(a)$$

وطريقة نيوتن لإيجاد $F(a) = 0$، هي التكرار

$$a_{n+1} = a_n - F(a_n)/F'(a_n) = a_n - \tanh(a_n) + 1/a_n$$

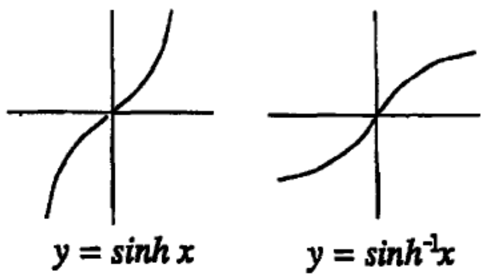
مع $a_1 = 1$، $a_2 = 1.2384$، $a_3 = 1.2009$، $a_4 = 1.19968$. التقريب النافع هو

$$a \approx 1.2$$

(الميل هو $m = \sinh(a) \approx 1.5$.) الدالتان F و y زوجيتان. بالتناظر، هنالك حل آخر $-a$ مع الميل $-\sinh a$.

5A-5

a)



$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y'' = \sinh x$$

y' لن تساوي الصفر أبداً، فلا وجود لنقاط حرجة. ونقطة الانعطاف عند $x=0$ ؛ ميل y هو 1. حيث y دالة فردية، مثل $e^x/2$ من اجل $x>>0$.

b) $x=\sinh y \quad \Leftrightarrow \quad y=\sinh^{-1}x$. المجال هو كل المحور x

c) اشتق $x=\sinh y$ ضمنياً بالنسبة إلى x:

$$1=\cosh y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y+1}}$$

$$\frac{d\sinh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(d

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{x^2+a^2/a^2}}$$
$$=\int\frac{d(dx/a)}{\sqrt{(x/a)^2+1}}$$
$$=\sinh^{-1}(x/a)+c$$

5A-6

a) $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta d\theta=2/\pi$.

b) $y=\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow y'=-x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 1+(y')^2=1/(1-x^2)$ بحيث

$$ds=w(x)dx=dx/\sqrt{1-x^2}$$

وبالتالي فإن المتوسط هو:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\Big/\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

البسط هو $\int_{-1}^{1} dx = 2$. لاحظ أن هذه التكاملات مشابهة للتي في الجزء (a)، خذ $x = \cos\theta$ (كما في الإحداثيات القطبية). ثم $dx = -\sin\theta d\theta$ ونهايات التكامل هي من $\theta = \pi$ إلى $\theta = 0$. قلب النهايات يحول الإشارة السالبة إلى موجبة:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} d\theta = \pi$$

(التعويض $x = \sin t$ يعمل بالمثل، لكن نهايات التكامل هي $-\pi/2$ و $\pi/2$.)

$(x = \sin t, dx = \cos t dt)$ (c

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \pi/4$$

5B. التكامل بالتعويض المباشر

قم بالحل بالتوقع والتصحيح للمعامل في البداية. التعويض يعطي تحديداً إضافة إلى الجواب.

5B-1 $\int x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}} + c \left(u = x^2-1, du = 2xdx\right)$

5B-2 $\int e^{8x}dx = \frac{1}{8}e^{8x} + c \qquad (u = 8x, du = 8dx)$

5B-3 $\int \frac{\ln xdx}{x} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \qquad (u = \ln x, du = dx/x)$

5B-4 $\int \frac{\cos xdx}{2+3\sin x} = \frac{\ln(2+3\sin x)}{3} + c \qquad (u = 2+3\sin x, du = 3\cos xdx)$

5B-5 $\int \sin^2 x\cos xdx = \frac{\sin x^3}{3} + c \quad (u = \sin x, du = \cos xdx)$

5B-6 $\int \sin 7xdx = \frac{-\cos 7x}{7} + c \qquad (u = 7x, du = 7dx)$

5B-7 $\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^2+4}} = 6\sqrt{x^2+4} + c \quad \left(u = x^2+4, du = 2xdx\right)$

5B-8

استعمل $u = \cos(4x)$ ، $du = -4\sin(4x)dx$

$$\int tan4xdx = \int \frac{\sin(4x)dx}{\cos(4x)} = \int \frac{-du}{4u}$$
$$= -\frac{\ln u}{4} + c = -\frac{\ln(\cos 4x)}{4} + c$$

5B-9 $\int e^x\left(1+e^x\right)^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\left(1+e^x\right)^{2/3} + c \quad \left(u = 1+e^x, du = e^x dx\right)$

5B-10 $\int \sec 9xdx = \frac{1}{9}\ln(sex(9x)+\tan(9x)) + c \qquad (u = 9x, du = 9dx)$

5B-11 $(u = 9x, du = 9dx)$ $\int \sec^2 9x dx = \frac{\tan 9x}{9} + c$

5B-12 $\int xe^{-x^2} dx = \frac{-e^{-x^2}}{2} + c \left(u = x^2, du = 2x dx\right)$

5B-13

$u = x^3$ ، $du = 3x\ dx$ تعني

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \int \frac{du}{3(1+u^2)} = \frac{\tan^{-1}}{3} + c$$
$$= \frac{\tan^{-1}(x^3)}{3} + c$$

5B-14 $(u = \sin x, du = \cos x dx)$ $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos x dx = \int_{\sin 0}^{\sin \pi/3} u^3 du$

$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} u^3 du = u^4/4 \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{9}{64}$$

5B-15

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^{3/2} dx}{x} = \int_{\ln 1}^{\ln e} u^{3/2} du \qquad (u = \ln x, \qquad du = dx/x)$$
$$= \int_0^1 y^{3/2} dy = (2/5) y^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

5B-16

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan^{-1} x dx}{1+x^2} = \int_{\tan^{-1}(-1)}^{\tan^{-1} 1} u du \qquad \left(u = \tan^{-1} x, du = dx/(1+x^2)\right)$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} u du = \frac{u^2}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0$$

($\tan x$ فردي ومنه $\tan^{-1} x$ فردي أيضاً، لذا على التكامل أن يكون معدوماً)

5C. التكاملات المثلثية

5C-1 $$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

5C-2 $$\int \sin^3(x/2) dx = \int (1-\cos^2(x/2)) \sin(x/2) dx = \int -2(1-u^2) du$$

(ضع $u = \cos(x/2), du = (-1/2)\sin(x/2)dx$)

$$= -2u + \frac{2u^3}{3} + c = -2\cos(x/2) + \frac{2\cos(x/2)^3}{3} + c$$

5C-3

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx$$

$$\int \frac{\cos^2(2x)}{4} dx = \int \frac{1+\cos 4x}{8} dx = \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

بجمع كل الحدود:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

5C-4

$$\int \cos^3(3x) dx = \int (1-\sin^2(3x)) \cos(3x) dx = \int \frac{1-u^2}{3} du \qquad (u = \sin(3x), \quad du = 3\cos(3x)dx)$$

$$= \frac{u}{3} - \frac{u^3}{9} + c = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(3x)^3}{9} + c$$

5C-5

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int -(1-u^2)u^2 dy \quad (u = \cos x, du = -\sin x dx)$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos x^3}{3} + \frac{\cos x^5}{5} + c$$

5C-6

$$\int \sec^4 x dx = \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x dx = \int (1+u^2)du \qquad (u=\tan x, du = \sec^2 x dx)$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + c = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

5C-7

$$\int \sin^2(4x)\cos^2(4x)dx = \int \frac{\sin^2 8x dx}{4} = \int \frac{(1-\cos 16x)dx}{8} = \frac{1}{8} - \frac{\sin 16x}{128} + c$$

لدينا طريقة أبطأ باستخدام:

$$\sin^2(4x)\cos^2(4x) = \left(\frac{1-\cos(8x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(8x)}{2}\right)$$

اضرب واستعمل الحيلة نفسها للتعامل مع $\cos^2(8x)$.

5C-8

$$\int \tan^2(ax)\cos(ax)dx = \int \frac{\sin^2(ax)}{\cos(ax)}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2(ax)}{\cos(ax)}dx$$

$$= \int (\sec(ax) - \cos(ax))dx$$

$$= \frac{1}{a}\ln(\sec(ax)+\tan(ax)) - \frac{1}{a}\sin(ax) + c$$

5C-9

$$\int \sin^3 x \sec^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx$$
$$= \int -\frac{1-u^2}{u^2}du \qquad (u=\cos x, du=-\sin x dx)$$
$$= u+\frac{1}{u}+c = \cos x + \sec x + c$$

5C-10

$$\int (\tan x+\cot x)^2 dx = \int \tan^2 x + 2 + \cot^2 x dx = \int \sec^2 x + \csc^2 x dx$$
$$= \tan x - \cot x + c$$

5C-11

$$\int \sin x \cos(2x) dx$$
$$= \int \sin x(2\cos^2 x - 1)dx = \int (1-2u^2)du \qquad (u=\cos x, du=-\sin x dx)$$
$$= u - \frac{2}{3}u^3 + c = \cos x - \frac{2}{3}\cos^2 x + c$$

5C-12

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos(2x) dx = \cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{3}$$ (أنظر 27.)

5C-13

$$ds = \sqrt{1+(y')}dx = \sqrt{1+\cot^2 x}dx = \csc x dx$$

طول القوس $= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc x dx = -\ln(\csc x + \cot x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln(1+\sqrt{2})$

5C-14

$$\int_0^{\pi/a} \pi \sin^2(ax)dx = \pi\int_0^{\pi/a}(1/2)(1-\cos(2ax))dx = \pi^2/2a$$

5D. التكامل بتعويض المقلوب

5D-1

ضع $x = a\sin\theta$ ، $dx = a\cos\theta d\theta$:

$$\int \frac{dx}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{a^2}\tan\theta + c = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + c$$

5D-2

ضع $x = a\sin\theta$ ، $dx = a\cos\theta d\theta$:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^3\int \sin^3\theta d\theta = a^3\int \left(1 - \cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$= a^3\left(-\cos\theta + (1/3)\cos^3\theta\right) + c$$

5D-3

بالتعويض المباشر $\left(u = 4 + x^2\right)$

$$\int \frac{xdx}{4 + x^2} = (1/2)\ln\left(4 + x^2\right) + c$$

ضع $x = 2\tan\theta$ ، $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ ؛

$$\int \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{1}{2}\int d\theta = \theta/2 + c$$

وككل،

$$\int \frac{(x+1)dx}{4 + x^2} = (1/2)\ln\left(4 + x^2\right) + (1/2)\tan^{-1}(x/2) + c$$

5D-4

ضع $x = a\sinh y$ ، $dx = a\cosh y dy$. حيث $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$ ،

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx \;= a^2\int \cosh^2 y dy = \frac{a^2}{2}\int (\cosh(2y)-1)dy$$
$$= (a^2/4)\sinh(2y) - a^2 y/2 + c = (a^2/2)\sinh y \cosh y - a^2 y/2 + c$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2}/2 - a^2 \sinh^{-1}(x/a) + c$$

5D-5

ضع $x = a\sin\theta$ ، $dx = a\cos\theta d\theta$:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}dx}{x^2} = \int \cot^2\theta d\theta$$
$$= \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = -\ln(\csc\theta + \cot\theta) - \theta + c$$
$$= -\ln\left(a/x + \sqrt{a^2-x^2}/x\right) - \sin^{-1}(x/a) + c$$

5D-6

ضع $x = a\sinh y$ ، $dx = a\cosh y dy$.

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = a^4\int \sinh^2 y \cosh^2 y dy$$
$$= (a^4/2)\int \sinh^2(2y)dy = a^4/4\int (\cosh(4y)-1)dy$$
$$= (a^4/16)\sinh(4y) - a^2 y/4 + c$$
$$= (a^4/8)\sinh(2y)\cosh(2y) - a^4 y/4 + c$$
$$= (a^4/4)\sinh(y)\cosh y(\cosh^2 y + \sinh^2 y) - a^4 y/4 + c$$
$$= (1/4)x\sqrt{a^2+x^2}(2x^2+a^2) - (a^4/4)\sinh^{-1}(x/a) + c$$

5D-7

ضع $x = a\sec\theta$، $dx = a\sec\theta tan\theta d\theta$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = \int \frac{\tan\theta d\theta}{\sec\theta}$$
$$= \int \frac{(\sec^2\theta-1)d\theta}{\sec\theta} = \int (\sec\theta-\cos\theta)d\theta$$
$$= \ln(\sec\theta+\tan\theta)-\sin\theta+c$$
$$= \ln\left(x/a+\sqrt{x^2-a^2}/a\right)-\sqrt{x^2-a^2}/x+c$$
$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\sqrt{x^2-a^2}/x+c_1 \quad (c_1=c-\ln a)$$

5D-8

الطريقة القصيرة: $u=x^2-9$ ، $du=2xdx$

تعويض مباشر $\int x\sqrt{x^2-9}dx=(1/3)(x^2-9)^{3/2}+c$

طريقة مباشرة (طريقة هذه الفقرة): ضع $x=3\sec\theta$ ، $dx=3\sec\theta\tan\theta d\theta$.

$$\int x\sqrt{x^2-9}dx = 27\int \sec^2\theta\tan^2\theta d\theta$$
$$= 27\int \tan^2\theta d(\tan\theta) = 9\tan^3\theta+c$$
$$= (1/3)(x^2-9)^{3/2}+c$$

$\left(\tan\theta=\sqrt{x^2-9}/3\right)$. طريقة التعويض في علم المثلثات لا تؤدي إلى طريقة مسدودة، لكنها ليست دائماً هي الأسرع.

5D-9

$y' = 1/x$ ، $ds = \sqrt{1+1/x^2}dx$ ، بحيث

طول القوس $= \int_1^b \sqrt{1+1/x^2}dx$

ضع $x = \tan\theta$ ، $dx = \sec^2\theta d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}dx}{x} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\sec^2\theta d\theta$$
$$= \int \frac{\sec\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta}d\theta$$
$$= \int (\csc\theta + \sec\theta\tan\theta)d\theta$$
$$= -\ln(\csc\theta + \cot\theta) + \sec\theta + c$$
$$= -\ln\left(\sqrt{x^2+1/x} + 1/x\right) + \sqrt{x^2+1} + c$$
$$= -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right) + \ln x + \sqrt{x^2+1} + c$$

طول القوس $= -\ln\left(\sqrt{b^2+1}+1\right) + \ln b + \sqrt{b^2+1} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2}$

__إتمام المربع__

5D-10

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left((x+2)^2+3^2\right)^{3/2}} \left(x+2 = 3\tan\theta, dx = 3\sec^2\theta d\theta\right)$$
$$= \frac{1}{9}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta + c = \frac{(x+2)}{9\sqrt{x^2+4x+13}} + c$$

5D-11

$$\int x\sqrt{-8+6x-x^2}\,dx=\int x\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx \quad (x-3=\sin\theta, dx=\cos\theta d\theta)$$
$$=\int (\sin\theta+3)\cos^2\theta d\theta$$
$$=(-1/3)\cos^3\theta+(3/2)\int(\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=(-1/3)\cos^3\theta+(3/4)\sin 2\theta+(3/2)\theta+c$$
$$=-(1/3)\cos^3\theta+(3/2)\sin\theta\cos\theta+(3/2)\theta+c$$
$$=-(1/3)(-8+6x-x^2)^{3/2}$$
$$+(3/2)(x-3)\sqrt{-8+6x-x^2}+(3/2)\sin^{-1}(x-3)+c$$

5D-12

$$\int \sqrt{-8+6x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx \qquad (x-3\sin\theta, dx=\cos\theta d\theta)$$
$$=\int\cos^2\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\theta}{2}+c$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\theta}{2}+c$$
$$=\frac{(x-3)\sqrt{-8+6x-x^2}}{2}+\frac{\sin^{-1}(x-3)}{2}+c$$

5D-13

ضع $x-1=\sin\theta$ ، $dx=\cos\theta d\theta$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$
$$=\int d\theta=\theta+c=\sin^{-1}(x-1)+c$$

5D-14

ضع $x+2=3\tan\theta$ و $dx=3\sec^2\theta$ في:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}$$

ضع: $= \int (3\tan\theta - 2)\sec\theta d\theta = 3\sec\theta - 2\ln(\sec\theta + \tan\theta) + c$

$$= \sqrt{x^2+4x+13} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+4x+13}/3 + (x+2)/3\right) + c$$

$$= \sqrt{x^2+4x+13} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+4x+13} + (x+2)\right) + c_1 \quad (c_1 = c - \ln 3)$$

5D-15

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-4x+17dx}}{2x-1} = \int \frac{\sqrt{(2x-1)+4^2}dx}{2x-1}$$

(ضع $2x-1=4\tan\theta$، $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ كما في المسألة 9)

$$= 2\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\sec^2\theta d\theta$$

$$= 2\int \frac{\sec(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta} d\theta$$

$$= 2\int (\csc\theta + \sec\theta\tan\theta)d\theta$$

$$= -2\ln(\csc\theta + \cot\theta) + 2\sec\theta + c$$

$$= -2\ln\left(\sqrt{4x^2-4x+17}/(2x-1) + 4/(2x-1)\right) + \sqrt{4x^2-4x+17}/2 + c$$

$$= -2\ln\left(\sqrt{4x^2-4x+17}+4\right) + 2\ln(2x-1) + \sqrt{4x^2-4x+17}/2 + c$$

5E. التكامل بالكسور الجزئية

5E-1

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1/5}{x-2}+\frac{-1/5}{x+3}$$ (بالحجب)

$$\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)}=(1/5)\ln(x-2)-(1/5)\ln(x+3)+c$$

5E-2

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{2/5}{x-2}+\frac{3/5}{x+3}$$ (بالإخفاء)

$$\int\frac{xdx}{(x-2)(x+3)}=(2/5)\ln(x-2)+(3/5)\ln(x+3)+c$$

5E-3

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\frac{1/10}{x-2}+\frac{1/2}{x+2}-\frac{3/5}{x+3}$$ (بالإخفاء)

$$\int\frac{xdx}{(x^2-4)(x+3)}=(1/10)\ln(x-2)+(1/2)\ln(x+2)-(3/5)\ln(x+3)$$

5E-4

$$\frac{3x^2+4x-11}{(x^2-1)(x-2)}dx=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$ (بالإخفاء)

$$\int\frac{2dx}{x-1}+\frac{-2dx}{x+1}+\frac{3dx}{x-2}=2\ln(x-1)-2\ln(x+1)+3\ln(x-2)+c$$

5E-5

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$ (بالإخفاء)؛ للحصول على B، ضع $x=1$:

$$\frac{5}{4}=2\frac{B}{2}+\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad B=-2$$

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx = 2\ln x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}+c$$

5E-6

$$\frac{2x-9}{(x^2+9)(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+9}+\frac{C}{x+2}$$

بالحجب، $C=-1$. للحصول على B و A،

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-9}{9\cdot 2}=\frac{B}{9}-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B=0$$

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-7}{10\cdot 3}=\frac{A}{10}-\frac{1}{3} \Rightarrow \quad A=1$$

$$\int \frac{2x-9}{(x^2+9)(x+2)}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\ln(x+2)+c$$

5E-7

عوِّض التفكير بـ(4) كناتج من (1) بالضرب في $x-1$، فكر فيه على أنه ناجٍ من

$$x-7=A(x+2)+B(x-1)$$

بالقسمة على $x+2$؛ بما أنَّ هذه المعادلة الجديدة صالحة من أجل أي x، فالخط (4) سيكون صالحاً من أجل $x\neq -2$،

5E-8

التقسيم الطويل:

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1} \quad (a$$

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1} \quad (b$$

$$\frac{x^2}{3x-1}=x/3+1/9+\frac{1/9}{3x-1} \quad (c$$

$$\frac{x+2}{3x-1}=\frac{1}{3}+\frac{7/3}{3x-1} \quad (d$$

$$\frac{x^8}{(x+2)^2(x-2)^2}=A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0+\frac{B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0}{(x+2)^2(x-2)^2} \quad (e$$

5E-9

تعطي طريقة الحجب

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}$$

من $8a$،

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}$$ و

$$\int\frac{x^2dx}{x^2-1}=x+(1/2)\ln(x-1)-(1/2)\ln(x+1)+c$$

(b تعطي طريقة الحجب

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}$$

من $8b$،

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}$$ و

$$\int\frac{x^3dx}{x^2-1}=\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\ln(x-1)+\left(\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)+c$$

c) من $8c$،

$$\int x\frac{2}{3x-1}dx=x^2/6+x/9(1/27)\ln(3x-1)+c$$

d) من $8d$،

$$\int\frac{x+2}{3x-1}dx=x/3+(7/9)\ln(3x-1)$$

e) طريقة الحجب تعني أن المعامل الكسري الجزئي يمكن كتابته بالشكل:

$$\frac{a_1}{x-2}+\frac{a_2}{(x-2)^2}+\frac{b_1}{x+2}+\frac{b_2}{(x+b)^2}$$

حيث المعاملات a_2 و b_2 يمكن حسابها من B باستعمال طريقة الحجب والمعاملات a_1 و b_1 يمكن إذن حسابها باستعمال $x=0$ و $x=1$. وبالتالي، يكون شكل التكامل

$$A_4x^5/5+A_3x^4/4+A_2x^3/3+A_1x^2/2+A_0x+c$$
$$+a_1\ln(x-2)-\frac{a_2}{x-2}-b_1\ln(x+2)-\frac{b_2}{x+2}$$

5E-10

بطريقة الحجب

(a $\frac{1}{x^3-x}=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}$

$$\int\frac{dx}{x^3-x}=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+c$$

(b بواسطة الحجب $\frac{4}{x-3}+\frac{-3}{x-2}=\int\frac{(x+1)dx}{(x-2)(x-3)}$

$$\int\frac{(x+1)}{(x-2)(x-3)}dx=-3\ln(x-2)+4\ln(x-3)+c$$

(c $\int\frac{(x^2+x+1)dx}{x^2+8x}=1+\frac{-7x+1}{x^2+8x}$. بالحجب

$$\frac{-7x+1}{x^2+8x}=\frac{-7x+1}{x(x+8)}=\frac{1/8}{x}+\frac{-57/8}{x+8}$$ و

$$\int\frac{(x^2+x+1)}{x^2+8x}=x+\left(\frac{1}{8}\right)\ln x-\left(\frac{57}{8}\right)\ln(x+8)+c$$

(d رؤية الضعف، يجب أن يكون متأخر HW.

$$\int \frac{dx}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} \quad (e$$

استعمل طريقة الحجب للحصول على $B=1$ و $C=1$. من أجل A

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}=A+1+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A=-1$$

وككل:

$$\int \frac{dx}{x^3+x^2}=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\ln x+\ln(x+1)-\frac{1}{x}+c$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2} \quad (f$$

بالتغطية، $A=1$ و $C=-2$. من أجل B،

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{4}=1+\frac{B}{2}-\frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad B=0$$ و

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx=\ln x+\frac{2}{x+1}+c$$

$(g$ بالضرب للتخلص من المقام: $(x+1)^2(x-1)=x^3+x^2-x-1$. القسمة على البسط:

$$\frac{x^3}{x^3+x^2-x-1}=1+\frac{-x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$$

اكتب الدالة الكسرية على الشكل:

$$\frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

بالحجب، $B=1/2$ و $C=1/4$. من أجل A،

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad -1=A+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{5}{4}$$ و

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int\left(1+\frac{-5/4}{x+1}+\frac{1/2}{(x+1)^2}+\frac{1/4}{x-1}\right)dx$$
$$=x-(5/4)\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}+(1/4)\ln(x-1)+c$$

(h $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+2x+2}=\int\left(1-\frac{1+2x}{x^2+2x+2}\right)dx=x-\int\frac{(2y-1)dy}{y^2+1}$ ضع $y=x+1$

$$=x-\ln(y^2+1)+\tan^{-1}y+c$$
$$=x-\ln(x^2+2x+2)+\tan^{-1}(x+1)+c$$

5E-11

بالفصل:

$$\frac{dy}{y(1-y)}=dx$$

انشر باستعمال الكسور الجزئية والتكامل:

$$\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)dy=\int dx$$

و منه،

$$\ln y - \ln(y-1) = x + c$$

بالرفع إلى الأس:

$$\frac{y}{y-1} = e^{x+c} = Ae^{x} \qquad (A = e^{c})$$

$$y = \frac{Ae^{x}}{Ae^{x}-1}$$

(إذا كاملت $1/(1/y)$ للحصول على $-\ln(1-y)$ فإذن ستصل إلى

$$y = \frac{Ae^{x}}{Ae^{x}+1}$$

هي من عائلة الإجابات نفسها مع تبادل A و $-A$)

5E-12

a) $1+z^2 = 1+\tan^2(\theta/2) = \sec^2(\theta/2)$. وبالتالي:

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{و} \quad \sin^2(\theta/2) = 1 - \frac{1}{1+z^2} = \frac{z^2}{1+z^2}$$

ثم

$$\cos\theta = \cos^2(\theta/2) - \sin(\theta/2) = \frac{1}{1+z^2} - \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{و}$$

$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos\theta/2 = 2\sqrt{\frac{1}{1+z^2}}\sqrt{\frac{z^2}{1+z^2}} = \frac{2x}{1+z^2}$$

وأخيراً:

$$dz = (1/2)\sec^2(\theta/2)d\theta = (1/2)(1+z^2)d\theta \qquad \Rightarrow \qquad d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$$

(b

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin\theta} = \int_{\tan 0}^{\tan\pi/2}\frac{2dz/(1+z^2)}{1+2z/(1+z^2)}$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{2dz}{z^2+1+2z} = \int_0^{\infty}\frac{2dz}{(z+1)^2}$$
$$= \left.\frac{-2}{1+z}\right|_0^{\infty} = 2$$

(c

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(1+\sin\theta)} = \int_{\tan 0}^{\tan\pi/2}\frac{2dz/(1+z^2)}{(1+2z/(1+z^2))^2} = \int_0^{\infty}\frac{2(1+z^2)dz}{(1+z\ \ )^4}$$
$$= \int_1^{\infty}\frac{2(1+(y-1)^2)dy}{y^4} \qquad (y = z+1 \quad \text{ضع})$$
$$= \int_1^{\infty}\frac{(2y^2-4y+4)dy}{y^4} = \int_1^{\infty}(2y^{-2}-4y^{-3}+4y^{-4})dy$$
$$= -2y^{-1}+2y^{-2}-(4/3)y^{-3}\Big|_1^{\infty} = 4/3$$

(d

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \int_0^{\infty}\frac{2z}{1+z^2}\frac{2dz}{1+z^2} = \int_0^{\infty}\frac{4zdz}{(1+z^2)^2}$$
$$= \left.\frac{-2}{1+z^2}\right|_0^{\infty} = 2$$

5E-13

a) $1+\cos\theta = 2/(1+z^2) \Rightarrow z=\tan(\theta/2)$ و $0\le\theta\le\pi/2$ يوافق $0\le z\le 1$.

$$A=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{2(1+\cos\theta)^2}=\int_0^1\frac{2dz/(1+z^2)}{8/(1+z^2)^2}$$
$$=\int_0^1(1/4)(1+z^2)dz=(1/4)(z+z^3/3)\Big|_0^1=1/3$$

b) المنحنى $r=1/(1+\cos\theta)$ عبارة عن قطع زائد:

$$r+r\cos\theta=1 \Rightarrow r+x=1 \Rightarrow r^2=(1-x)^2 \Rightarrow y^2=1-2x$$

وهي المنطقة تحت $y=\sqrt{1-2x}$ في الربع الأول:

$$A=\int_0^{1/2}\sqrt{1-2x}\,dx=-(1/3)(1-2x)^{3/2}\Big|_0^{1/2}=1/3$$

5F. التكامل بالتجزئة. صيغ التقليص

5F-1

(a
$$\int x^a \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right) = \ln x \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1} - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{x^{a+1}\ln x}{a+1} - \int \frac{x^a}{a+1} dx = \frac{x^{a+1}\ln x}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + c \qquad (a \neq -1)$$

(b
$$\int x^{-1} \ln x dx = (\ln x)^2/2 + c \qquad (u = \ln x, du = dx/x)$$

5F-2

(a
$$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

(b
$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx$$
$$= x^2 \cdot e^x - 2\int xe^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + c$$

(c
$$\int x^3 e^x dx = \int x^3 d(e^x) = x^3 \cdot e^x - \int e^x \cdot 3x^2 dx$$
$$= x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x + c$$

(d
$$\int x^n e^{ax} dx = \int x^n d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{e^{ax}}{a} \cdot x^n - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot nx^{n-1} dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a} \cdot x^n - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$$

5F-3

$$\int \sin^{-1}(4x)dx = x\cdot\sin^{-1}(4x) - \int xd\left(\sin^{-1}(4x)\right) = x\cdot\sin^{-1(4x)} - \int x\cdot\frac{4dx}{\sqrt{1-(4x)^2}}$$

$$= x\cdot\sin^{-1}(4x) + \int \frac{du}{8\sqrt{u}} \quad \left(u = 1-16x^2, du = -32xdx \quad \text{ضع}\right)$$

$$= x\cdot\sin^{-1}(4x) + \frac{1}{4}\sqrt{u} + c$$

$$= x\cdot\sin^{-1}(4x) + \frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + c$$

5F-4

$$\int e^x \cos xdx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x d(-\cos x)$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x$$

أضف $\int e^x \cos xdx$ إلى الطرفين للحصول على

$$2\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

قسِّم على 2 وعوِّض الثابت الكيفي بـ $c/2$

$$\int e^x \cos xdx = \left(e^x \sin x + e^x \cos x\right)/2 + c$$

5F-5

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cdot\cos(\ln x) - \int xd(\cos(\ln x))$$
$$= x\cdot\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$$
$$= x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int xd(\sin(\ln x))$$
$$= x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

أضف $\int \cos(\ln x)dx$ إلى الطرفين كليهما للحصول على:

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + c$$

قُمْ بالقسمة على 2 وعوّض الثابت الكيفي c بـ $c/2$:

$$\int \cos(\ln x)dx = (x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x))/2 + c$$

5F-6

ضع $dt = e^x dx \quad \Rightarrow \quad t = e^x$ و $x = \ln t$. وبالتالي:

$$\int x^n e^x dx = \int (\ln t)^n dt$$

قم بالتكامل بالتجزئة:

$$\int (\ln t)^n dt = t\cdot(\ln t)^n - \int tdt(\ln t)^n = t(\ln t)^n - n\int (\ln t)^{n-1}dt$$

لأنَّ $d(\ln t)^n = n(\ln t)^{n-1}t^{-1}dt$