الوحدة 6. مواضيع إضافية

6A. الأشكال غير المحددة؛ قاعدة لوبيتال

6A-1

أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x/2)-1}{x^2}$

c) $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x-4}{x+1}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{5x}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x)}{\sin(3x)}$

i) $\lim_{x\to \pi}\frac{\ln\sin(x/2)}{x-\pi}$

j) $\lim_{x\to \pi}\frac{\ln\sin(x/2)}{(x-\pi)^2}$

6A-2

احسب النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

c) $\lim_{x\to 0^+} (1/x)^{\ln x}$

d) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

e) $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

f) $\lim_{x\to 0^+} (1+x^2)^{1/x}$

$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (i　　$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$ (h　　$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{10/x}$ (g

خذ بعين الاعتبار كل قيم a و b.　$\lim_{x\to\infty} x^a(\ln x)^b$ (k　　$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{1/x^2}$ (j

6A-3

الأس x^{-1} هو حالة الأس بين التكاملات الأسية لـ x. كان جميلاً لو أن:

$$\lim_{a\to -1}\int x^a dx = \int x^{-1}dx$$

تبدو حالة ميؤوساً منها لتكون صحيحة[1] بما أنَّ:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c \qquad \text{من أجل } a\neq -1$$

تتضمن القوى فقط، ومع ذلك التكامل x^{-1} هو لوغاريتم. لكن يمكن حله باستعمال التكامل المحدود. بين باستعمال قاعدة لوبيتال أنَّ:

$$\lim_{a\to -1}\int_1^x t^a dt = \int_1^x t^{-1}dt \qquad (=\ln x)$$

6A-4

بين أنه عندما يؤول a إلى -1 حل مختار بعناية لـ E30/1(a) فالإجابة هنا تعود إلى الإجابة في الطلب (b). تلميح: اتبع طريقة المسألة السابقة.

[1] يبدو ميؤوساً منه لأنه لكل اختيارات c يكون للتكامل غير المحدد نهاية غير محدودة مثل $a\to -1$. يؤدي التكامل المحدود إلى الاختيار الصحيح لـ c، بالتحديد، $c=-1(a+1)$. الثابت c هو ثابت بالنسبة إلى x، لكنه ما من سبب لعدم تغيره مع a. و الاختيار الصحيح لـ c يجعل النهاية عندما $a\to -1$ محدودة.

6A-5

بالاستعمال المتكرر لقاعدة لوبيتال،

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-4}{2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{-2}=-3$$

لكن عندما $x\approx 0$ ، $\frac{3x^2-4x}{2x-x^2}\approx\frac{-4x}{2x}=-2.$ حلل الاختلاف.

6A-6

مثل بيانياً الدوال التالية: (ستساعدك قاعدة لوبيتال مع بعض قيم النهايات في الأطراف.)

a) $y=xe^{-x}$ b) $y=x\ln x$ c) $y=x/\ln x$

6B. التكاملات المعتلة

جرب تقارب التكاملات المعتلة التالية باستعمال المقارنة بالتكامل الأبسط:

6B-1 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$

6B-2 $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+2}$

6B-3 $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}$

6B-4 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

6B-5 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x}$

6B-6 $\int_1^{\infty} \frac{\ln xdx}{x^2}$

6B-7

قرر ما إذا كانت التكاملات التالية متقاربة أو متباعدة واحسبها إذا كانت متقاربة.

a) $\int_0^{\infty} e^{-8x}dx$

b) $\int_1^{\infty} x^{-n}dx,\ \ n>1$

c) $\int_1^{\infty} x^{-n}dx,\ \ 0<n\le 1$

d) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

e) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$

f) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

h) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$

i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$

j) $\int_0^1 \ln xdx$

k) $\int_0^{\infty} e^{-2x}\cos xdx$

l) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)}$ (استعمل (f))

m) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$ n) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$ o) $\int_0^{10} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

p) $\int_0^{\pi} \sec x dx$

6B-8

أوجد النهايات التالية. (استعمل النظرية الأساسية للحساب.)

a) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ b) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ c) $\lim_{x\to\infty} e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

d) $\lim_{a\to 0^+} \sqrt{a} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e) $\lim_{a\to 0^+} \sqrt{a} \int_a^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ f) $\lim_{a\to(\pi/2)^+} (b-\pi/2)\int_0^b \frac{dx}{1-\sin x}$

6C. السلاسل اللا نهائية

6C-1

أوجد مجموع السلاسل الهندسية التالية

a) $1+1/5+1/25+\cdots$ b) $8+2+1/2+\cdots$ c) $1/4+1/4+\cdots$

اكتب الأعداد ذات الأرقام اللانهائية بعد الفاصلة التالية على شكل عددين طبيعيين:

d) $0.4444...$ e) $0.0602602602602...$

6C-2

قرر ما إذا كانت السلاسل التالية متباعدة أم متقاربة؛ بين المنطق في هذا. (لا تحسب المجاميع.)

a) $1+1/2+1/3+1/4+1/5+\cdots$؛ استعمل المقارنة بتكامل.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$؛ اعتبر الحالة التي يكون فيها $p>1$ و $p\le 1$.

c) $1/2+1/4+1/6+1/8+\cdots$

d) $1+1/3+1/5+1/7+\cdots$

e) $1-1/2+1/3-1/4+1/5-\cdots$

تلميح: قسم الحدود المتتالية إلى مجموعات ثنائية لتستفيد من ميزة الحذف. ثم استعمل المقارنة.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$. h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n 5^{-n/2}$

(i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (j $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ (k $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^4-5}$

(l $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{1/3}}{(n^4+5)^{1/3}}$ (m $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ (n $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$

(o $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$

6C-3

(a استعمل مجموع ريمان العلوي والسفلي من أجل:

$$\ln n=\int_1^n\frac{dx}{x}$$

لتبيّن أنَّ:

$$\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$$

(b افرض أن الحاسوب يستغرق 10^{-10} ثانية لجمع حد واحد من السلسلة $\sum 1/n$. كم يلزمه من الزمن لحساب المجموع الجزئي ليصل إلى 1000؟

الوحدة 6. مواضيع إضافية

6A. الأشكال غير المحددة؛ قاعدة لوبيتال

6A-1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}=3 \quad (a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x/2)-1}{x^2}=\frac{(-1/2)\sin(x/2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1/4)\cos(x/2)}{2}=-1/8 \quad (b$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0 \quad (c$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x-4}{x+1}=-4. \quad (d$$ لا يمكننا استعمال قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x^2)}{5}=1/5 \quad (e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=1/6 \quad (f$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^{a-1}}{bx^{b-1}}=a/b \quad (g$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\tan 1}{\sin 3} \quad (h$$ لا يمكننا استعمال قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\sin(x/2)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1/2)\cot(x/2)}{1}=0 \quad (i$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\sin(x/2)}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1/2)\cot(x/2)}{2(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{(-1/4)\csc^2(x/2)}{2}=-1/8 \quad (j$$

6A-2

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=e^{x\ln x}\to e^0=1 \quad (a$$ عندما $x\to 0^+$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

b) $x^{1/x}\to 0$ عندما $x\to 0^+$ لأن $x\to 0$ و $1/x\to\infty$.

الطريقة البطيئة باستعمال اللوغاريتم:

$x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to e^{-\infty} = 0$ عندما $x\to 0^+$ لأن

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. (لا يمكننا استعمال قاعدة لوبيتال.)

c) لا نستطيع استعمال قاعدة لوبيتال. هنالك طريقتان:

$(1/x)^{\ln x} \to (\infty)^{-\infty} = 0$ أو $(1/x)^{\ln x} = e^{\ln x\ln(1/x)} = e^{-(\ln x)^2} \to e^{-\infty} = 0$

d) $(\cos x)^{1/x} = e^{\frac{\ln\cos x}{x}} \to e^0 = 1$ عندما $x\to 0^+$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{1} = 0$$

e) $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to e^0 = 1$ عندما $x\to\infty$ لأن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$$

f) $(1+x^2)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}} \to e^0 = 1$ عندما $x\to 0^+$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x/(1/x^2)}{1} = 0$$

g) $(1+3x)^{10/x} = e^{\frac{10\ln(1+3x)}{x}} \to e^{30}$ عندما $x \to 0^+$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{10\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{10\cdot 3/(1+3x)}{1} = 30$$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{x}$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x}(?)$ لكن الحد الثاني غير موجود، لذلك فإن قاعدة لوبيتال ضمنية.

لكن الحد الأول غير موجود. في النهاية:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\cos x}{x} = 1$$

لأن:

$$\frac{|\cos x|}{x} \le \frac{1}{x} \to 0$$ عندما $x \to \infty$

تعليق: قاعدة لوبيتال تقوم لا تقوم بعملها جيداً مع الدوال الاهتزازية.

i) الطريقة الأسرع: عوّض $u = 1/x$.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos u}{1} = 1$$

الطريقة البطيئة:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-1/x^2)\cos(1/x)}{-1/x^2} = \cos 0 = 1$$

j) $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{\ln(x/\sin x)}{x^2}} \to e^{\frac{1}{6}}$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x/\sin x)}{x^2}=1/6$$

هذه نهاية صعبة. بالرغم من إمكانية القيام بحلها حسب قاعدة لوبيتال فإن الطريقة الأسهل هي طريقة التقريبات التربيعية (وحتى التكعيبية !)

$$\frac{x}{\sin x}\approx\frac{x}{x-x^3/6}=\frac{1}{1-x^2/6}\approx 1+x^2/6$$

و منه:

$$\ln(x/\sin x)\approx\ln(1+x^2/6)\approx x^2/6$$

وبالتالي:

$x\to 0$ عندما $\frac{1}{x^2}\ln(x/\sin x)\to 1/6$

$k)$ الحالات الواضحة: إذا كان الأس موجباً (أو أحدها معدوم والآخر موجب) تكون النهاية لانهائية. إذا كان الأسان سالبان (أو أحدهما 0 والآخر سالب) تكون النهاية تساوي الـ 0. إذا كان كل من الأسين معدومين فإن النهاية تساوي 1.

الحالات المتبقية هي التي يكون لـ a و b إشارتان متعاكستان. في الحالتين كلتيهما يتفوق a. بكلمة أخرى، $a<0$ تعني أن النهاية تساوي 0 و $a>0$ تعني أن النهاية تساوي ∞. لرؤية هذا يلزمنا استعمال قاعدة لوبيتال مرة واحدة فقط. من أجل $\theta>0$،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\alpha x^{\alpha}=\infty$$

إذا كان $a>0$ و $b<0$، لتكن $c=-b>0$. إذن

$x^a(\ln x)^b = \left(\dfrac{x^{a/c}}{\ln x}\right)^c \to \infty$ عندما $x \to \infty$

باستعمال $\alpha = a/c > 0$. الحالة $a < 0$ و $b > 0$ متبادلتان إذن تؤول إلى 0.

6A-3

باستعمال قاعدة لوبيتال و $\dfrac{d}{da}x^{a+1} = x^{a+1}\ln x$؛

$$\lim_{a\to -1}\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}\right) = \lim_{a\to -1}\frac{x^{a+1}-1}{a+1} = \lim_{a\to -1}\frac{x^{a+1}\ln x}{1} = \ln x$$

6A-4

$$\int_1^x t^\alpha \ln t dt = \frac{x^{a+1}\ln x}{a+1} - \frac{a^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}$$

و بالتالي فإنه باستعمال قاعدة لوبيتال و $\dfrac{d}{da}x^{a+1} = a^{a+1}\ln x$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to -1}\int_1^x t^a \ln t dt &= \lim_{a\to -1}\frac{(a+1)x^{a+1}\ln x - x^{a+1} + 1}{(a+1)^2} \\
&= \lim_{a\to -1}\frac{(a+1)x^{a+1}(\ln x)^2}{2(a+1)} \\
&= (\ln x)^2/2 = \int_1^x t^{-1}\ln t dt
\end{aligned}$$

6A-5

لا يمكنك استعمال قاعدة لوبيتال من أجل $\lim_{x\to 0}\frac{6x-4}{2-2x}$، لأن البسط والمقام لا يؤولان إلى الصفر عندما $x\to 0$. المساواة الأولى صحيحة، لكن الثانية خطأ.

6A-6

a) $y = xe^{-x}$ معرفة على المجال $-\infty < x < \infty$.

$y' = (1-x)e^{-x}$ و $y'' = (-2+x)e^{-x}$

وبالتالي فإن $y' > 0$ من أجل $x < 1$ و $y' < 0$ من أجل $x > 1$؛ $y'' > 0$ من أجل $x > 2$ و $y'' < 0$ من أجل $x < 2$.

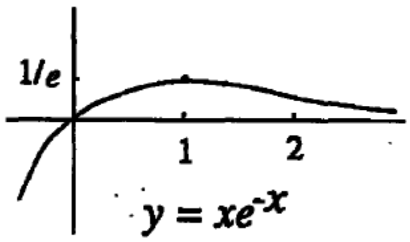
نقاط النهايات: $y\to -\infty$ عندما $x\to -\infty$، لأن $e^{-x}\to\infty$ عندما $x\to -\infty$. بواسطة قاعدة لوبيتال،

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

القيم الحرجة: $y(1) = 1/e$.

المنحنى: $(-\infty,\infty)$ ↖ $(1,1/e)$ ↙ $(\infty,0)$.

مقعّر إلى الأعلى: $2 < x < \infty$، مقعّر إلى الأسفل: $-\infty < x < 2$.



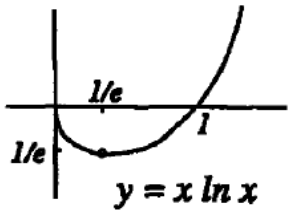
b) $y = x\ln x$ معرفة على $0 < x < \infty$.

$y' = \ln x + 1$، $y'' = 1/x$

وبالتالي فإن $y'>0$ من اجل $x>1/e$ و $y'<0$ من أجل $x<1/e$؛ $y''>0$ من أجل كل $x>0$.

قيم نقاط النهايات: عندما $x\to\infty$، كل من x و $\ln x$ يؤولان إلى مالانهاية، إذن $y\to\infty$. بواسطة قاعدة لوبيتال،

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{1}=0$$



النقاط الحرجة: $y(1/e)=-1/e$.

المنحنى: $(0,0)$ ↙ $(1/e,-1/e)$ ↖ (∞,∞) يقطع الصفر عند $x=e$. مقعر إلى الأعلى من أجل كل $x>0$.

(c $y=x/\ln x$ معرّف عند $0<x<\infty$، ما عدا $x=1$.

$$y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)}$$

بحيث، $y'<0$ من أجل $0<x<1$ ومن أجل $1<x<e$ و $y'>0$ من أجل $x>e$

قيمة النهايات: $y\to 0$ عندما $x\to 0^+$ لأن $x\to 0$ و $1/\ln x\to 0$. قاعدة لوبيتال تعني:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/x}=\infty$$

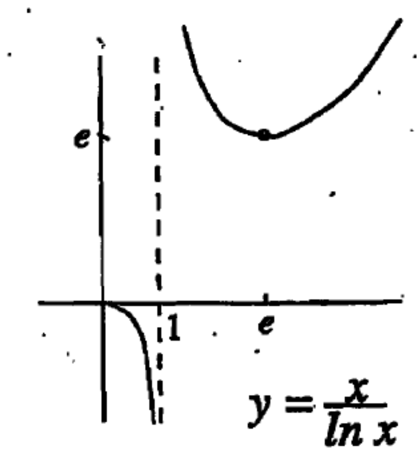
القيم المفردة: $y(1^+)=\infty$ و $y(1^-)=-\infty$.

القيم الحرجة: $y(e)=e$.

المنحنى: $(0,0)$ ↙ $(1,-\infty)$ ↑ $(1,\infty)$ ↙ (e,e) ↖ (∞,∞)

لتحديد ما إذا كان محدباً أو مقعراً:

$$y'' = \frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$



لدينا $y''=0$ عندما $\ln x = 2$، على سبيل المثال عندما $x=e^2$.

من هذا، $y''<0$ من أجل $0<x<1$ ومن أجل $x>e^2$ و $y''>0$ من أجل $1<x<e^2$

مقعر (إلى الأسفل) : على $0<x<1$ و $x>e^2$

محدب (مقعر إلى الأعلى): عند $1<x<e^2$

نقاط الانعطاف: $(e^2, e^2/2)$ (بعيدة جداً إلى اليمين فلن تظهر على المنحنى).

6B. التكاملات المعتلة

6B-1

$\frac{dx}{\sqrt{x^3+5}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ من أجل $x>0$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ التي تتقارب حسب $\mathrm{INT}(4)$

الإجابة/ تتقارب

6B-2

$\frac{x^2dx}{x^3+2} \cong \frac{1}{2x}$ إذا كانت x>>1، نتوقع التباعد

$\frac{x^2dx}{x^3+2} > \frac{1}{2x}$ إذا كانت $3x^3 > x^3+2$ أو $x^3>2$ أو $x>2^{1/3}$

$\int_2^\infty \frac{x^2dx}{x^3+2} > \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ التي تتباعد حسب $\mathrm{INT}(4)$.

$\int_2^\infty \frac{x^2dx}{x^3+2}$ تتباعد، باختبار المقارنة وكذلك $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^3+2}$ من $\mathrm{INT}(3)$.

6B-3

$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}$ يختفي التكامل عند $x=0$

$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} \approx \frac{1}{x^2}$ عندما $x \cong 0$

لذا نعتقد أنه متباعد.

$\frac{1}{2x^2} > \frac{1}{x^3+x^2}$ إذا كانت $2x^2 > x^3 + x$ أو $x^2 > x^3$ ؛ صحيحة إذا كانت $0 < x < 1$.

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2} > \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2} \Rightarrow$ التي تتباعد حسب $\text{INT}(6)$

6B-4

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ يختفي التكامل عند $x = 1$

$\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ من أجل $x \cong 1$

لذا نعتقد أنه يتقارب

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ إذا كانت $x^3 < x$ فهو موافق إذا كانت $0 < x < 1$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ تتقارب حسب $\text{INT}(6)$، إذن $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ تتقارب أيضاً باختبار المقارنة.

6B-5

$\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ معتل في النهايتين كلتيهما.

عند ∞ يتقارب، بما أنَّ

$e^{-x} < \frac{e^{-x}dx}{x}$ إذا كان $x > 1$ و $\int_0^\infty e^{-x}$ تتقارب.

عند النهاية المعدومة: هناك مشكلة ! $\frac{1}{x} \approx \frac{e^{-x}dx}{x}$. إذن نعتقد أنه يتباعد.

$\frac{1}{4x} > \frac{e^{-x}dx}{x}$ عند $a < x < 1$

$0 < x < 1 \quad \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{x} > \int \frac{e^{-x}dx}{x} \longrightarrow$ أي تباعد.

$\Leftarrow \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ تتباعد – نهاية واحد لانهائية (النهاية 0 !)

6B-6

$$\int_1^\infty \frac{\ln xdx}{x^2}$$

هنا $\ln x$ تتزايد ببطء، مما يجعلنا نتوقع التقارب.

$\frac{\ln x}{x^2} < \frac{x}{x^2}$ غير متقاربة.

ماذا عن $\frac{1}{x^{3/2}} < \frac{\ln x}{x^2}$؟ إذا كانت $x >> 1$. هذا يعني $1 < \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ إذا كانت $x >> 1$ وهذا صحيح، بما أنَّ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Leftarrow \frac{x}{x^{3/2}} < \frac{\ln xdx}{x^2} \int_1^\infty$ تتقارب، حسب $\mathrm{INT}(4)$.

إذن $\int_1^\infty \frac{\ln xdx}{x^2}$ تتقارب باختبار المقارنة.

لقد كُتبت هذه بالتفصيل، للمراجعة. ليس عليك أن تحل بهذا التفصيل.

6B-7

(a $\int_0^\infty e^{-8x}dx = -(1/8)e^{-8x}\Big|_0^\infty = 1/8$ متقاربة

(b $\int_1^\infty x^{-n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{n-1}$ متقاربة $(n > 1)$

(c متباعدة

d) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = -\left(4-x^2\right)^{1/2}\Big|_0^2 = 2$ متقاربة

e) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2(2-x)^{1/2}\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$ متقاربة

f) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -(\ln x)^{-1}\Big|_e^\infty = 1$ متقاربة

g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = (3/2)x^{3/2}\Big| = \frac{3}{2}$ متقاربة

h) متباعدة (عند $x=0$)

i) متباعدة (عند $x=0$)

j) متقاربة لأن $\ln x$ يؤول إلى $-\infty$ بأبطأ من أي أس عندما $x \to 0^+$

التكامل بالتجزئة

$$\int_0^1 \ln xdx = x\ln x - x\Big|_0^1 = -1$$

(نحتاج إلى قاعدة لوبيتال للتحقق من أنَّ $x\ln x \to 0$ عندما $x \to 0^+$.)

k) متقاربة لأن $\left|e^{-2x}\cos\right| < e^{-2x}$. احسب بالتكامل بالتجزئة مرتين (كما في E30/4).

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos xdx = \frac{1}{5}e^{-2x}\sin x - \frac{2}{5}e^{-2x}\cos x\Big|_0^\infty = 2/5$$

l) متقاربة ($\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)} = \ln\ln x\Big|_e^\infty = \infty$)

m) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)^3} = (-1/2)(x+2)^{-2}\Big|_0^\infty = 1/8$ متقاربة

n) متباعدة (عند $x=2$)

o) متباعدة (عند $x=0$)

p) متباعدة (عند $x=\pi/2$)

6B-8

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x \frac{e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$ (حسب لوبيتال والنظرية الأساسية الثانية)

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x \frac{e^{t^2}dt}{e^{x^2}/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}/2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2-(1/x^2)}=\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=A$ وهوعدد محدد $0<$ لأن التكامل متقارب. لكن $e^{x^2}\to\infty$، فكامل الحد يؤول إلى ما لا نهاية.

d) $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\int_a^1 x^{-1/2}dx}{1/\sqrt{a}}=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{-1/\sqrt{a}}{(-1/2)a^{-3/2}}=\lim\limits_{a\to0^+}2a=0$ (حسب لوبيتال والنظرية الأساسية الثانية)

e) $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\int_a^1 x^{-3/2}dx}{1/\sqrt{a}}=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{-a^{-3/2}}{(-1/2)a^{-3/2}}=2$ (لوبيتال و FT2)

f)
$$\begin{aligned}\lim_{b\to(\pi/2)^+}(b-\pi/2)\int_0^b\frac{dx}{1-\sin x}&=\lim_{b\to(\pi/2)^+}\frac{\int_0^b\frac{dx}{1-\sin x}}{1/(b-\pi/2)}\\&=\lim_{b\to(\pi/2)^+}\frac{1/(1-\sin b)}{1/(b-\pi/2)^2}\\&=\lim_{b\to(\pi/2)^+}\frac{(b-\pi/2)^2}{\sin b-1}\\&=\lim_{b\to(\pi/2)^+}\frac{2(b-\pi/2)}{\cos b}\\&=\lim_{b\to(\pi/2)^+}\frac{2}{-\sin b}=-2\end{aligned}$$

6C. السلاسل اللا نهائية

6C-1

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4} \quad (a$$

$$8+2+\frac{1}{2}+\ldots=8\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=8\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{6B}{3} \quad (b$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+.\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}\right)=\frac{5}{4} \quad (c$$

$$0.4444\ldots=0.4\left(1+0.1+0.1^2+0.1^3+\ldots\right)=0.4\left(\frac{1}{1-0.1}\right)=0.4\left(\frac{1}{0.9}\right)=\frac{4}{9} \quad (d$$

$$0.0602602602\ldots=0.0602(1+0.001+0.00001+\ldots)=0.0602\left(\frac{1}{1-0.001}\right) \quad (e$$
$$=\frac{0.0602}{0.999}=\frac{301}{4995}$$

6C-2

$$1+1/2+1/31/4+\ldots \quad (a$$

بوضوح، لدينا ، $1>\int_1^2\frac{1}{x}dx$ ، $\frac{1}{2}>\int_2^3\frac{1}{x}dx\ \ldots\ldots$

إذن سيكون لدينا $\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\int_4^5\frac{1}{x}dx+\ldots<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ ، وهي متباعدة.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (b

الحالة 1: $\frac{1}{n^p} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^p}$. $p \le 1$

$\Leftarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ، هي متباعدة، إذن السلسلة اللانهائية متباعدة.

الحالة 2: $p > 1$

$$\frac{1}{n^p} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

هي متقاربة، إذن السلسلة لانهائية متقاربة.

$1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots = (1/2)(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots)$. (c من a ، السلسلة متباعدة.

$1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots$ (d

$1 > 1/2, 1/3 > 1/4, 1/5 > 1/6, 1/7 > 1/8 \ldots$

إذن $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots > 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots$ وهي متباعدة من c ومنه فإن السلسلة تتباعد.

(e

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots \\
&< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \\
&< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots
\end{aligned}$$

وهي متقاربة حسب الطلب b). إذن السلسلة اللامتناهية متقاربة.

f) $n/n! = 1/(n-1)! < 1/(n-1)(n-2) \approx 1/n^2$ من أجل $n >> 1$. إذن متقاربة مقارنة مع b).

g) السلاسل الهندسية مع النسبة $\left(\sqrt{5}-1\right)/2 < 1$، إذن السلسة متقاربة

h) السلسلة الهندسية مع النسبة $\left(\sqrt{5}+1\right)\left(2\sqrt{5}\right) < 1$، إذن السلسلة متقاربة.

i) أكبر من $\Sigma 1/n$ من أجل $n \geq 3$، إذن متقاربة حسب الطلب b

j) $\ln n$ تتزايد أبطأ من أي أس. على سبيل المثال،

$$\ln n < n^{1/2} \Rightarrow \frac{\ln n}{n^2} < n^{-3/2}$$ من أجل $n >> 1$

السلسلة $\Sigma n^{-3/2}$ تتقارب بحسب الطلب b)، إذن هذه السلسلة تتقارب أيضاً.

k) تتقارب لأن $\frac{n+2}{n^4-5} \approx \frac{1}{n^3}$، و Σn^{-3} تتقارب بحسب الطلب b).

l) $\frac{(n+2)^{1/3}}{\left(n^4+5\right)^{1/3}} \cong \frac{n^{1/3}}{n^{4/3}} \cong \frac{1}{n}$. وبالتالي فإن هذه السلسلة تتباعد بالمقارنة مع $\Sigma 1/n$.

m) التقريب التربيعي يعني $\cos(1/n) \approx 1 - 1/2n^2$ ومنه:

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \cong -1/2n^2$$ عندما $n \to \infty$

ومنه السلسلة تتقارب بالمقارنة مع $\Sigma 1/n^2$ بحسب الطلب b)

n) هناك فرق كبير بين e^{-n} و n^2. على سبيل المثال، قاعدة لوبيتال تعني

$$e^{-n/2}n^2 \to 0$$ عندما $n \to \infty$

وبالتالي فإنه من أجل n كبيرة، $n^2e^{-n} = n^2e^{-n/2}e^{-n/2}$ و $\Sigma e^{-n/2}$ هي سلسلة هندسية متقاربة. وعليه فإن فالسلسلة الأصلية تتقارب بالمقارنة.

o) فقط كما في الجزء (n)، هناك فرق كبير بين $e^{-\sqrt{n}}$ و n^2 . وقاعدة لوبيتال تعني:

$e^{-m/2}m^4 \to 0$ عندما $m \to \infty$

ضع $m = \sqrt{n}$ للحصول على:

$e^{-\sqrt{n}/2}n^2 \to 0$ عندما $n \to \infty$

وبالتالي فإنه من أجل n كبيرة، $n^2 e^{-\sqrt{n}} = n^2 e^{-\sqrt{n}/2} e^{-\sqrt{n}/2} < e^{-\sqrt{n}/2}$. وأكثر من هذا، لدينا أيضاً

$e^{-\sqrt{n}} < 1/n^2$ n كبير

بحيث يكون المجموع مُهيمِناً عليه من $\Sigma e^{-\sqrt{n}/2} < \Sigma 1/n^2$ ومتقارباً بالمقارنة مع الجزء (b).

6C-3

a) $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} =$ المجموع العلوي $< \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$

بكلمات أخرى،

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$$

من ناحية أخرى

$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} =$ المجموع السفلي $> \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$

بإضافة 1 إلى الطرفين كليهما،

$$1+\ln n > 1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}$$

b) نحتاج على الأقل إلى $\ln n = 999$

الزمن $> 10^{-10}e^{999} \approx 7\times 10^{423}\,\text{seconds}$

هذا أطول بكثير من الزمن المقدر للـ "البينغ بانغ"