الوحدة 7 :السلاسل اللانهائية

7A. تعريفات أساسية

7A-1

هل تتقارب أم تتباعد السلاسل التالية؟ أعط سبباً لذلك. إذا كانت السلاسل تتقارب، أوجد المجموع.

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots$

b) $1-1+1-1+\cdots(-1)^n+\cdots$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$

d) $\ln 2+\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt[3]{2}+\ln\sqrt[4]{2}+\cdots$

e) $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}$

f) $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$

7A-2

أوجد العدد الجزئي الممثل بـ ما بعد الفاصلة النهائي $.21111\cdots$

7A-3

من أجل أية x تتقارب هذه السلسلة $\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ ؟ لهذه القيم، أوجد مجموعها $f(x)$.

7A-4

أوجد مجوع هذه السلاسل بإيجاد المجموع الجزئي S_n أولاً:

a) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (تلميح: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$ من أجل a و b مناسبتين)

7A-5

ترمى كرة من ارتفاع h؛ كل مرة ترتطم بالأرض، ترتد رجوعاً بـ$2/3$ من الارتفاع الذي رميت منه. ما هي المسافة الكلية (ارتفاعاً ونزولاً) التي قطعتها الكرة.

7B. تجارب حول التقارب

7B-1

باستعمال اختبار التكامل، بين إذا كانت هذه السلاسل تتقارب أو تتباعد؛ اشرح الحل.

a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ b) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ c) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ e) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p \cdot n}$ f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(في المثالين الأخيرين، تتعلق الإجابة بقيمة المعيار p .)

7B-2

باستعمال اختبار مقارنة النهاية، بين أي من هذه السلاسل تتقارب وأيها تتباعد؛ اشرح الحل. (المقارنة البسيطة يمكن أن تعطي الحل في بعض الحالات.)

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

g) $\sum_{2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-1}$ h) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{4n^4+n^2}$

7B-3

برهن أنَّه إذا كانت $a_n > 0$ و $\sum_0^\infty a_n$ تتقارب، فإن $\sum_0^\infty \sin a_n$ تتقارب أيضاً.

7B-4

باستعمال اختبار النسبة، أو غيرها، حدد ما إذا كانت كل من هذه السلاسل متقاربة بشكل مطلق. (لاحظ أنَّ $0! = 1$.)

a) $\sum_0^\infty \frac{n}{2^n}$ b) $\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}$ c) $\sum_1^\infty \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

d) $\sum_0^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ e) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ f) $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$ ؛ استعمل النهاية $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

g) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ h) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ i) $\sum_0^\infty \frac{n}{n+1}$

7B-5

بالنسبة إلى السلاسل في 7C-4 التي لا تتقارب إطلاقا، حدد ما إذا كانت تتقارب أو تتباعد بشرط.

7B-6

باستعمال اختبار النسبة، حدد قطر التقارب لكل من السلاسل الأسية التالية.

a) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_1^\infty \frac{2^n x^n}{n^2}$ c) $\sum_0^\infty n!\, x^n$

(d $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n}$ (e $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n\sqrt{n}}$ (f $\sum_{0}^{\infty}\frac{(2n)!x^{2n}}{(n!)^2}$

(g $\sum_{2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$ (h $\sum_{0}^{\infty}\frac{2^{2n}x^n}{n!}$

7C. تقريبات السلاسل الأسية لتايلور

7C-1

باستعمال الصيغة العامة من أجل المعاملات a_n، أوجد سلاسل تايلور عند 0 للدوال التالية؛ قم بالعمل بمنهجية، بالحساب بدرجة $f^{(n)}$ ، $f^{(n)}(0)$ ، ومن ثم المعاملات a_n.

(a $\cos x$ (b $\ln(1+x)$ (c $\sqrt{1+x}$

7C-2

احسب $\sin 1$ باستعمال سلاسل تايلور إلى الحد من الدرجة x^3. قيم الدقة باستعمال الحد المتبقي. (القيمة على الآلة الحاسبة هي 0.84147) استعمل الحد المتبقي $R_6(x)$ وليس $R_5(x)$ ؛ لماذا؟

7C-3

باستعمال الحد المتبقي، بين لأي قيمة لـ n في التقريب:

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

الحسابات الناتجة ستعطي e إلى 3 أرقام بعد الفاصلة (بالاتفاق، يعني هذا: ضمن 0.0005).

7C-4

باستعمال الحد المتبقي، بيّن ما إذا كان $\cos x \approx 1+\frac{x^2}{2!}$ صالحا ضمن 0.001 على طول المجال $|x|<5$.

7C-5

احسب $\int_0^5 e^{-x^2}\,dx$، باستعمال التقريب e^{-x^2} إلى الحد من الدرجة x^4. قدر الخطأ، باستعمال الحد المتبقي الصحيح (3-7B)، وحدد ما إن كانت الإجابة جيدة من أجل 3 أرقام بعد الفاصلة.

7D: السلاسل الأسية العامة

7D-1

أوجد السلسلة الأسية حول $x=0$ من أجل كل من الدوال التالية باستعمال سلاسل تايلور المعروفة:
استعمل التعويض، الجمع، التفاضل، التكامل، أو أي شيء آخر يمكنك أن تفكر فيه:

a) e^{-2x}

b) $\cos\sqrt{x}$، $x \geq 0$

c) $\sin^2 x$ (استعمل الوحدة)

e) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

e) $\tan^{-1} x$ (قم بالاشتقاق)

f) $\ln(1+x)$

g) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

7D-2

باستعمال العمليات على السلاسلة الأسية (التعويض، الجمع، المكاملة، التفاضل، الضرب)، أوجد السلاسل الأسية للدوال التالية، وحدد نصف قطر التقارب. (بعد التحديد، أعط فقط الحدين الإثنين أو الحدود الثلاثة الأولى التي لا تساوي الصفر.)

a) $\dfrac{1}{x+9}$

b) e^{-x^2}

c) $e^x \cos x$ (ثلاثة حدود)

d) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

e) $\operatorname{erf} x = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

f) $\dfrac{1}{x^3-1}$

g) $\cos^2 x$ (قم بالتفاضل؛ ثم استعمل الوحدة المثلثية)

h) $\dfrac{\sin x}{1-x}$ (ثلاثة حدود)؛ قم بالحل بطريقتين: الضرب، وقسمة سلسلة $\sin x$ على $1-x$

i) $\tan x$ (حدين)؛ قم بالحل بطريقتين: سلاسل تايلور، وقسمة السلاسل الأسية

7D-3

أوجد النهايات التالية باستعمال السلاسل الأسية، وليس باستعمال قاعدة لوبيتال.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{\sin^2 x}$

d) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cos u-1}{\ln(1+u)-u}$

الوحدة 7: السلاسل اللانهائية

7A. تعريفات أساسية

7A-1

a) جمع السلاسل الهندسية: $\sum_0^\infty \frac{1}{4^n} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-(1/4)} = \frac{4}{3}$

b) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$ تتباعد، بما أنَّ المجاميع الجزئية s_n هي على الترتيب $1,0,1,0,\ldots$، وعليه فإن السلسة لا تتقارب إلى نهاية.

c) تتباعد، بما أنَّ الحد n وهو $\frac{n-1}{n}$ لا يؤول إلى 0 (استعملنا اختبار الحد n من أجل التقارب).

d) السلسلة المعطاة= $\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2+\ldots=\ln 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$؛ لكن $\sum_1^\infty 1/n$ تتباعد وعليه فإن السلسلة المعطاة تتباعد.

e) $\sum_1^\infty \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_1^\infty \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$، سلسلة هندسية مع المجموع $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(2/3)}\right)=\frac{1}{3}\cdot 3=1$

f) السلسلة $=\sum_0^\infty\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-(-1/3)}=\frac{3}{4}$ (مجموع السلسلة الهندسية)

7A-2

$$.21111\ldots=.2+.01+.001+\ldots=.2+.01\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=.2+.01\left(\frac{1}{1-1/10}\right)=\frac{19}{90}$$

7A-3

السلسلة الهندسية؛ تتقارب إذا كان $|x/2|<1$، على سبيل المثال، إذا كان $|x|<2$، أو بالتكافؤ، $-2<x<2$.

7A-4

a) المجموع الجزئي: $s_m = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \to 1$ عندما $m \to \infty$. وبالتالي فإن المجموع هو 1.

b) $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}$؛ وبالتالي فإن $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)} = 1/2 \sum_0^\infty \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

المجموع الجزئي للحد m للسلسلة هو:

$$1\ s_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$$

بما أنَّ كل الحدود الأخرى تلغى.

وبالتالي فإن $s_m \to \frac{3}{4}$ عندما $m \to \infty$، بحيث يكون المجموع $3/4$.

7A-5

المسافة التي تقطعها الكرة هي ... $h + \frac{2}{3}h + + \frac{2}{3}h + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}h\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}h\right) + \ldots$ ؛ الحدود المتتالية تبين السقوط الأول، الصعود الأول، السقوط الثاني، الصعود الثاني وهكذا. أضف h إلى لسلسلة لجعل الحدود متجانسة؛ وتحصل على السلسلة الهندسية للجمع:

$$2\left(h + 2h/3 + (2/3)^2 h + \ldots\right) = 2h\left(1 + 2/3 + (2/3)^2 + \ldots\right) = 2h\left(\frac{1}{1-2/3}\right) = 6h$$

.

بطرح h الذي قمنا بإضافته نحصل على: المسافة الكلية المقطوعة= $5h$.

7B. تجارب حول التقارب

7B-1

a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big]_0^\infty = \infty$ متباعدة

b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} = \tan^{-1} x\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ متقاربة

c) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 2(x+1)^{1/2}\Big]_0^\infty = \infty$ ؛ متباعدة

d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big]_1^\infty = \infty$ تتباعد

e) $\int_2^\infty \frac{1}{(\ln x)^p \cdot x} = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big]_2^\infty$ ، إذا كان $p \neq 1$: متباعدة إذا كان $p<1$ ، متقاربة إذا كان $p>1$

إذا كان $p=1$ ، $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x)]_2^\infty = \infty$. السلسلة تتقارب إذا كان $p>1$ ، تتباعد إذا كان $p \le 1$.

f) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^\infty$ ، إذا كان $p \neq 1$ ؛ تتباعد إذا كان $p<1$ ، تتقارب إذا كان $p>1$.

إذا كان $p=1$ ، $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x]_1^\infty = \infty$ ؛ بحيث تتقارب السلسلة إذا كان $p>1$ ، تتباعد إذا كان $p \le 1$.

7B-2

a) متقاربة؛ قارن بـ $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$: $\frac{n^2}{n^2+3n} = \frac{1}{1+3/n} \to 1$ عندما $n \to \infty$

b) متباعدة؛ قارن بـ $\sum \frac{1}{n}$:، $\frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} \to 1$ ، عندما $n \to \infty$

c) متباعدة؛ قارن بـ $\sum \frac{1}{n}$: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \to 1$ عندما $n \to \infty$

d) متقاربة؛ قارن بـ $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}: 1 = \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

e) متقاربة؛ قارن بـ $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}: 1 \to \frac{1}{1+1/n^2} = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^{3/2}\sqrt{n}}{n^2+1}$ عندما $n\to\infty$

f) متباعدة؛ بالتحقق بالمقارنة: $\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$ ؛ $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ تتباعد.

g) متقاربة؛ مقارنة مع $\sum \frac{1}{n^2}: 1 \to \frac{n^4}{n^4-1} = \frac{n^2\cdot n^2}{n^4-1}$ عندما $n\to\infty$

h) متباعدة؛ مقارنة مع $\sum \frac{1}{4n}: 1 \to \frac{1}{1+1/4n^2} = \frac{4n\cdot n^3}{4n^4+n^2}$

7B-3

بواسطة نظرية القيمة المتوسطة، $\sin x < x$، إذا كانت $x>0$ ؛ وبالتالي فإن $\sum_0^\infty a_n > \sum_0^\infty \sin a_n$ ؛ إذن السلسلة تتقارب باختبار المقارنة.

7B-4

a) باختبار النسبة، $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2^n}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}$ عندما $n\to\infty$ ؛ تتقارب.

b) باختبار النسبة، $0 \to \frac{2}{n+1} = \frac{n!}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ عندما $n\to\infty$ ؛ تتقارب.

c) باختبار النسبة، $0 \to \frac{2}{2n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots\cdots 2n-1}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdots\cdots 2n+1}$ عندما $n\to\infty$ ؛ تتقارب.

d) باختبار النسبة، $\frac{1}{4} \to \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!^2}\cdot\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}$ عندما $n\to\infty$ ؛ تتقارب.

e) اختبار النسبة يفشل، $\frac{\sqrt{n}}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1$ عندما $n\to\infty$؛ لكن $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}$ تتباعد؛ وبالتالي فإن السلسلة غير متقاربة بشكل مطلق.

f) باختبار النسبة، $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{(1+1/n)^n}\to\frac{1}{e}<1$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب.

g) اختبار النسبة يفشل، $\frac{n^2}{1}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\to 1$ عندما $n\to\infty$؛ لكن $\Sigma\frac{1}{n^2}$ تتقارب؛ وبالتالي فإن السلسلة غير متقاربة بشكل مطلق.

h) اختبار النسبة يفشل، $\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ تتباعد، بمقارنة النهاية مع $\Sigma\frac{1}{n}$؛ وبالتالي فإن السلسلة غير متقاربة بشكل مطلق.

i) اختبار النسبة يفشل، $\sum\frac{n}{n+1}$ تتباعد، باختبار الحد n؛ وبالتالي فإن السلسلة غير متقاربة بشكل مطلق.

7B-5

e) متقاربة بشرط: الحدود تتبادل في الإشارة، $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$، تتناقص؛

h) متقاربة بشرط: الحدود تتبادل في الإشارة، $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\to 0$، تتناقص؛

i) تتباعد، عند الاختبار على الحد n: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}\neq 0$.

7B-6

في كل مما يلي، استعملنا اختبار النسبة.

a) $\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x|^n}=|x|\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)\to|x|$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل $|x|<1$ ؛ $R=1$

b) $\dfrac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{2^n|x|^n}=2|x|\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\to 2|x|$ عندما $n\to\infty$؛

تتقارب من أجل $2|x|<1$ أو $|x|<1/2$؛ $R=1/2$.

c) $\dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=(n+1)|x|\to\infty$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب فقط من أجل $|x|=0$؛ $R=0$

d) $\dfrac{|x|^{2(n+1)}}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{|x|^{2n}}=\dfrac{|x|^2}{3}\to\dfrac{|x|^2}{3}$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل $\dfrac{|x|^2}{3}<1$، أو $|x|<\sqrt{3}$؛ $R=\sqrt{3}$.

e) $\dfrac{|x|^{2n+3}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{2^n\sqrt{n}}{|x|^{2n+1}}=\dfrac{|x|^2}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\to\dfrac{|x|^2}{2}$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل $\dfrac{|x|^2}{2}<1$ أو $\sqrt{2}>|x|$؛ $R=\sqrt{2}$

f) $\dfrac{(2n+2)!|x|^{2n+2}}{(n+1)!^2}\cdot\dfrac{n!^2}{(2n)!|x|^{2n}}=|x|^2\cdot\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\to 4|x|^2$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل $4|x|^2<1$، أو $|x|<1/2$؛ $R=1/2$

g) $\dfrac{|x|^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\dfrac{\ln n}{|x|^n}=|x|\cdot\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\to|x|$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل $|x|<1$؛ $R=1$

(بواسطة قاعدة لوبيتال، $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/(x+1)}=1$.)

h) $\dfrac{2^{2n+2}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2^{2n}|x|^n}=\dfrac{2^2|x|}{n+1}\to 0$ عندما $n\to\infty$؛ تتقارب من أجل جميع قيم x؛ $R=\infty$

7C. تقريبات السلاسل الأسية لتايلور

7C-1

(a $y=\cos x$ $\quad y=-\sin x$ $\quad y''=-\cos x$ $\quad y^{(3)}=\sin x$ $\quad y^{(4)}=\cos x$ ،...

$y(0)=1$ $\quad y'(0)=0$ $\quad y''(0)=-1$ $\quad y^{3}(0)=0$ $\quad y^{4}(0)=1$ ...

$a_0=1$ $\quad a_1=0$ $\quad a_2=-1/2!$ $\quad a_3=0$ $\quad a_4 1/4!$ ...

ثم يتكرر النمط مع المعاملات الكبرى، فنحصل في النهاية على:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

(b $y=\ln(1+x)$ $\quad y'=(1+x)^{-1}$ $\quad y''=-(1+x)^{-2}$ $\quad y^{(3)}=2!(1+x)^{-3}$ $\quad y^{(4)}=-3!(1+x)^{-4}$ ،...

$y(0)=0$ $\quad y'(0)=1$ $\quad y''(0)=-1$ $\quad y^{(3)}(0)=2!$ $\quad y^{(4)}(0)=-3!$ ،...

$a_0=0$ $\quad a_1=1$ $\quad a_2=-1/2$ $\quad a_3=1/3$ $\quad a_4=-1/4$ ،...

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots$$

(c الحدود النموذجية في الحساب معطاة.

$y=(1+x)^{1/2}$ $\quad y''=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$ $\quad y^{(4)}=\frac{(-1)(-3)(-5)}{2^4}(1+x)^{-7/2}$

$y(0)=1$ $\quad y''(0)=\frac{-1}{2^2}$ $\quad y^{(4)}(0)=\frac{(-1)^3(1\cdot3\cdot5)}{2^4}$

$a_0=1$ $\quad a_2=-1/8$ $\quad a_4=-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4 4!}$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots$$

يحصل أحدنا على الجواب نفسه باستعمال الصيغة الثنائية؛ هذه طريقة تذكر السلسلة:

$$(1+x)^{1/2}=1+\left(\frac{1}{2}\right)x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}+x^3+\ldots$$

7C-2

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+R_6(x)$.

(يمكننا استعمال كلٍّ من $R_5(x)$ أو $R_6(x)$، بما أنَّ كثير الحدود في الأعلى هو كل من $T_5(x)$ و $T_6(x)$، لكن $R_6(x)$ يعطي خطأ أصغر إذا كان $|x|<1$؛ بما أنها تحتوي على أس أكبر لـ x.)

$R_6(1)=\frac{\sin^{(7)}c}{7!}\cdot 1^7=\frac{-\cos c}{7!}$، من أجل $0<c<1$. وبالتالي

$$R_6(6)\le\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}<.0002$$

بحيث $\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\approx .84166$؛ القيمة الحقيقية هي sin1=.84147 وهي ضمن الخطأ المتوقع حسب مذكرة تايلور.

7C-3

بما أن $f(x)=e^x$ إذاً الحد المتبقي من الحد n يعطى بـ

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<\frac{5}{10^5}$$ إذا كان $n+1=8$

وبالتالي فإننا نريد $n=7$، على سبيل المثال يجب علينا استعمال كثير الحدود تايلور ذي الدرجة 7؛ الحسابات تعطي $e\approx 1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+1/720+1/5040=2.71825\ldots$ التي يجب تصحيحها إلى 3 أرقام بعد الفاصلة.

7C-4

بالاستعمال كما في 7C-2 المتبقي $R_3(x)$، عوضاً عن $R_2(x)$، لدينا:

$$\left|R_3(x)\right| = \left|\frac{\cos^{(4)}(c)}{x^4}x^4\right| = \left|\frac{\cos c}{4!}x^4\right| \le \frac{|x|^4}{4!} \le \frac{(.5)^4}{24} = .0026$$

إذن الجواب هو لا، إذا كانت $|x| < .5$. (إذا كان المجال مقلصاً إلى $|x| < .3$، فستكون الإجابة بنعم، بما أنَّ $(.3)^4/24 < .001$.)

7C-5

صيغة تايلور من أجل e^x، بالتعويض $-x^2$ من أجل x.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{e^c\left(-x^2\right)}{3!}, \quad 0 < c < .5$$

بما أنَّ $0 < e^c < 2$، الحد المتبقي هو $< \frac{x^6}{3}$؛ التكامل،

$$\int_0^5 e^{-x^2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^5 + error = .461 + error$$

حيث $|error| < \int_0^5 \frac{x^6}{3} = \left.\frac{x^7}{21}\right]_0^5 = .00028 < .0003$؛ بحيث يكون الجواب $.461$ جيد إلى 3 أرقام بعد الفاصلة.

7D: السلاسل الأسية العامة

7D-1

(a) $$e^{-2x}=1-2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n+\ldots$$

بتعويض $-2x$ من أجل x في السلسلة من أجل e^x.

(b) $$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}+\ldots$$

(c) $$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!}\right)-\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

(d) اكتب السلسلة من أجل $1/(1+x)$، اشتق واضرب الطرفين كليهما بـ-1:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^2+\ldots+(-1)^{n+1}x^{n+1}+\ldots$$
$$\frac{1}{(x+1)^2}=1-2x+3x^2+\ldots+(-1)^n(n+1)^n$$

(e) $$D\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+..+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$ ،

بتعويض x^2 من أجل x في السلسلة بالنسبة إلى $\frac{1}{1+x}$؛ (أنظر (d) أعلاه). الآن كامل طرفي المعادلة أعلاه كليهما:

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots+C$$

قم بحساب ثابت التكامل بوضع $x=0$، يحصل أحدنا على $0=0+C$ إذن $C=0$.

(f) $$D\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+...+C$$

بتكامل الطرفين كليهما. أوجد C بوضع $x=0$ ، يحصل أحدنا على $C=0$.

(g
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

بالجمع والقسمة على 2 نحصل على: $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$

7D-2

(a
$$\frac{1}{x+9}=\frac{1/9}{1+x/9}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{9^2}-\frac{x^3}{9^3}+...\right)=\frac{1}{9}-\frac{x}{9^2}+\frac{x^2}{9^3}-...$$

(b $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$ ؛ بتعويض $-x^2$ من أجل x نحصل على

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+...$$

(c
$$e^x\cos x=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+...\right)=1+x+\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{2}+...\right)$$

الحدود ذات x^2 تلغى: $=1+x-\frac{x^3}{3}+...$

(d
$$\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}+...+\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}+...$$

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+...$$

$$e^{-t^2/2}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{t^6}{2^3\cdot 3!}+\dots \quad (e$$

$$\int_0^x e^{-t^2/2}dt = x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n\cdot n!}+\dots$$

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{-1}{1-x^3}=-1-x^3-x^6-\dots-x^{3n}-\dots \quad (f$$

$(g$ $\quad y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x \quad \Rightarrow \quad y=\cos^2 x$ ؛ تعويض $2x$ في السلسلة من أجل $\sin x$

$y'=-2x+\frac{2^3x^3}{3!}-\frac{2^5x^5}{5!}+\dots$ بالتكامل،

$$y=\cos^2 x=-x^2+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dots+C$$

بما أنّ $y(0)=1$ ، نرى أنّ $C=1$ ، إذن $\cos^2 x=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\dots$

$(h$ الطريقة 1:

$$\frac{\sin x}{1-x}=(\sin x)\left(\frac{1}{1-x}\right)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)(1+x+x^2+x^3+\dots)$$
$$=x+x^2+\left(x^3-\frac{x^3}{6}+\dots\right)=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\dots$$

الطريقة الثانية: قم بقسمة $1-x$ على $x-x^3/6+\dots$ ، كما هو معمول به على اليسار في الأسفل:

$$\begin{array}{lll} & & x+x^2+5x^3/6+\dots \\ 1-x & x & \quad -x^3/6\dots \\ & x-x^2 & \\ & \quad x^2-x^3/6+\dots & \\ & \quad x^2-x^3 & \\ & \qquad 5x^3/6+\dots. & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & x+x^3/3+\dots \\ 1-x^2/2 & x-x^3/6+\dots \\ & x-x^3/2 \\ & x^3/3+\dots \end{array}$$

$(i$ الطريقة 1: حساب المشتقات المتتالية يعطي:

$y=\tan x$ ، $y'=\sec^2 x$ ، $y''=2\sec^2 x\tan x$ ، $y^{(3)}=2\left(2\sec^2 x\tan x\cdot\tan x+\sec^2 x\cdot\sec^2 x\right)$

$y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ ، $y''(0)=0$ ، $y^{(3)}(0)=2$

إذن سلسلة تايلور تبدأ من:

$$\tan x=x+\frac{2x^3}{3!}+\ldots=x+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

الطريقة 2: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ؛ قم بقسمة سلسة $\cos x$ على سلسلة $\sin x$ (معمول بها في اليمين أعلاه)- تبين أن هذا أسهل من أخذ المشتقات!

7D-3

a) $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1-\left(1-x^2/2+\ldots\right)}{x^2}=\dfrac{x^2/2+\ldots}{x^2}$ عندما $x\to 0$

b) $\frac{1}{6}$ $\rightarrow$ $\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{x-\left(x-x^3/6+\ldots\right)}{x^3}=\dfrac{x^3/6+\ldots}{x^3}$ عندما $x\to 0$

c) $(1+x)^{1/2}=1+x/2-x^2/8+\ldots \Rightarrow (1+x)^{1/2}-1-x/2=-x^2/8+\ldots$

$\sin x=x-x^3/6+\ldots \Rightarrow \sin^2 x=x^2+\ldots$

وبالتالي فإن، $\dfrac{(1+x)^{1/2}-1-x/2}{\sin^2 x}=\dfrac{-x^2/8+\ldots}{x^2+\ldots}\rightarrow\dfrac{-1}{8}$ عندما $x\to 0$.

d) $\cos u-1=-u^2/2+\ldots$ ؛ $\ln(1+u)-u=-u^2/2+\ldots$

وبالتالي فإن، $\dfrac{\cos u-1}{\ln(1+u)-u}=\dfrac{-u^2/2+\ldots}{-u^2/2+\ldots}\rightarrow 1$ عندما $u\to 0$.