الوحدة 1. التفاضل

1A- التمثيل البياني

1A-1

استعمل الانسحاب وتغيير السلم لرسم ما يلي، وذلك بالإكمال إلى المربع الكامل

a) $y = x^2 - 2x - 1$ b) $y = 3x^2 + 6x + 2$

1A-2

ارسم، باستعمال الانسحاب وتغيير السلم

a) $y = 1 + |x + 2|$ b) $y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

1A-3

حدد كلاً مما يلي إن كان فردياً، زوجياً أو ليس أياً منهما

a) $\dfrac{x^3 + 3x}{1 - x^4}$ b) $\sin^2 x$

c) $\dfrac{\tan x}{1 + x^2}$ d) $(1 + x)^4$

e) $J_0(x^2)$ ، حيث $J_0(x)$ دالة لم يسبق لك أن سمعت بها.

1A-4

a) بين أن كل كثير حدود هو مجموع دالتين زوجية وفردية.

b) عمم الجزء (a) إلى دالة كيفية $f(x)$ بكتابة

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

تحقق من هذه المعادلة، ثم بين أنَّ الدالتين على اليمين هما على الترتيب زوجية ثم فردية.

c) كيف يمكنك أن تكتب $\frac{1}{x+a}$ كمجموع لدالتين زوجية وفردية؟

1A-5

أوجد مقلوب كل ما يلي، وارسم التمثيل البياني لكل من $f(x)$ ومقلوب الدالة $g(x)$. حدد المجال لـ x إذا تطلب منك الأمر. (اكتب $y=f(x)$ وحل من أجل y؛ ثم بدل بين x و y.)

a) $\frac{x-1}{2x+3}$

b) x^2+2x

1A-6

عبر بالشكل $A\sin(x+c)$ عما يلي:

a) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$

b) $\sin x-\cos x$

1A-7

أوجد الدور، السعة، وفرق الطور، واستعملها للتمثيل البياني لـ

a) $3\sin(2x-\pi)$

b) $-4\cos(x+\pi/2)$

1A-8

افرض أنَّ $f(x)$ هي فردية ودورية. بين أنَّ التمثيل البياني لـ $f(x)$ يقطع المحور x في عدد لا نهائي من المرات.

1A-9

a) مثل بيانياً الدالة f التي تتمثل في قطع مستقيمة تتقاطع عند النقاط $(-1,-1)$، $(1,2)$، $(3,-1)$ و $(5,2)$. مثل هذه الدالة يسمى بدالة القطعات الخطية.

b) مدد التمثيل البياني لـ f دورياً. ما هو دوره؟

c) مثل بيانياً الدالة $g(x)=3f((x/2)-1)-3$.

1B- السرعة ومعدل التغير

1B-1

يرمى أنبوب اختبار من أعلى ناطحة سحاب (لأهداف هذه التجربة، يبلغ ارتفاع ناطحة السحاب 400 قدم فوق الأرض، وقد تم تفريغ كل الهواء المحيط بالمنشأة، لكي نستبعد تأثير مقاومة الهواء.) يسقط أنبوب الاختبار $16t^2$ قدم في t ثانية. احسب

a) السرعة المتوسطة في الثانيتين الأوليتين للسقوط.

b) السرعة المتوسطة في الثانيتين الأخيرتين للسقوط.

c) السرعة اللحظية عند الارتطام.

1B-2

ترتد كرة التنس بحيث تكون سرعتها الابتدائية صعوداً مباشراً b قدم في الثانية الواحدة. ارتفاعها s (بالقدم) عند اللحظة t ثانية يعطى بـ $s = bt - 16t^2$

a) أوجد السرعة $v = ds/dt$ عند اللحظة t.

b) أوجد الزمن الذي يكون فيه ارتفاع الكرة عند حده الأقصى.

c) أوجد الارتفاع الأقصى.

d) ارسم الرسم البياني لـ v ومباشرة تحته ارسم التمثيل البياني لـ s كدالة للزمن. تأكد من تمثيل القيمة القصوى لـ s وبداية ونهاية الارتداد.

e) نفترض أنه عندما ترتد الكرة للمرة الثانية فإنها تصل إلى نصف ارتفاع الارتداد الأول. مثل بيانياً s و v للارتدادين، حدد النقاط المهمة. (سيكون لك أن تقرر كم يستمر الارتداد الثاني والسرعة الابتدائية عند بداية الارتداد.)

f) إذا استمرت الكرة بالارتداد، ما هو الزمن الذي ستأخذه حتى تتوقف؟

1C- الميل والمشتقة

1C-1

a) استعمل تعريف حاصل القسمة للمشتقة لحساب معدل تغير مساحة القرص بالنسبة إلى نصف قطره. (إجابتك يجب أن تكون محيط القرص.)

b) استعمل تعريف حاصل القسمة للمشتقة لحساب معدل تغير حجم الكرة بدلالة نصف قطرها. (يجب أن تكون إجابتك مساحة الكرة.)

1C-2

لتكن $f(x)=(x-a)g(x)$. استعمل تعريف المشتقة لحساب $f'(a)=g(a)$ ، بافتراض أنَّ g مستمرة.

1C-3

احسب مشتقة كل من هذه الدوال مباشرة من التعريف.

a) $f(x)=1/(2x+1)$ b) $f(x)=2x^2+5x+4$

c) $f(x)=1/(x^2+1)$ d) $f(x)=1/\sqrt{x}$

e) بالنسبة إلى (a) و (b) أوجد النقاط التي يكون عندها الميل $+1$ ، -1 ، 0.

1C-4

اكتب معادلة الخط المماسي للدوال التالية.

a) $f(x)=1/(2x+1)$ عند $x=1$ b) $f(x)=2x^2+5x+4$ عند $x=a$

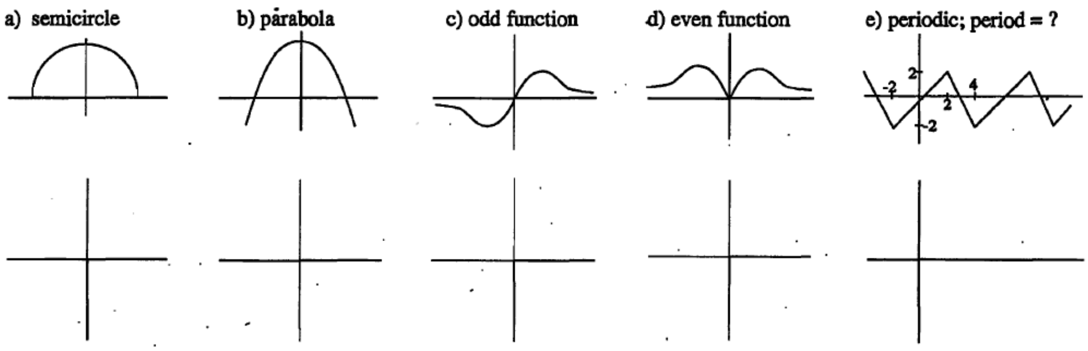
c) $f(x)=1/(x^2+1)$ عند $x=0$ d) $f(x)=1/\sqrt{x}$ عند $x=a$.

1C-5

أوجد كل الخطوط المماسية للمنحنى $y=1+(x-1)^2$ والتي تمر من نقطة المبدأ.

1C-6

مثل بيانياً المشتق للدوال التالية مباشرة تحت التمثيل البياني للدوال. من المساعد جداً معرفة أن مشتقة الدالة الفردية زوجية ومشتقة الدالة الزوجية فردية (أنظر 1F-6 لاحقاً).



1D- النهايات والاستمرارية

1D-1

احسب النهايات التالية إن وجدت. إن لم توجد، بين ما إذا كانت $+\infty$، $-\infty$ أو غير محددة.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2}{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x^2}{2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4x^2}{2-x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2}{x-2}-4x$ i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2-2x+4}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

1D-2

لأي مما يلي نستعمل النهاية من جانب واحد؟ احسبها.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^4}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

1D-3

عين وحدد نوع نقاط عدم الاستمرارية لكل ما يلي:

a) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ b) $\dfrac{1}{\sin x}$ c) $\dfrac{x^4}{x^3}$ d) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x>0\\ x-a, & x<0\end{cases}$

e) $f'(x)$ بالنسبة إلى $f(x)$ في d) f) $(f(x))^2$، عندما $f(x)=\dfrac{d}{dx}|x|$.

1D-4

مثل بيانياً الدوال التالية.

a) $\dfrac{4x^2}{x-2}$ (انظر 1D-1efg) b) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

1D-5

من أجل $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\ge 1 \\ x^2, & x<1 \end{cases}$.

a) أوجد كل قيم a، b من أجل أن تكون $f(x)$ مستمرة.

b) أوجد كل قيم a، b من أجل أن تكون $f'(x)$ مستمرة (كن حذراً !).

1D-6

لكل من الدوال التالية، أوجد قيم الثوابت a و b التي من أجلها تكون الدالة قابلة للاشتقاق.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+1, & x\ge 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+1, & x\ge 1 \\ ax+b, & x<1 \end{cases}$

1D-7

أوجد قيم الثوابت a، b و c التي من أجلها تكون الدالة قابلة للاشتقاق. (أعط a و b بدلالة c)

$f(x)=\begin{cases} cx^2+4x+1, & x\ge 1; \\ ax+b, & x<1, \end{cases}$

1D-8

من أجل كل دالة مما يلي، أوجد قيم الثوابت a و b التي من أجلها تكون الدوال التالية مستمرة ولكن **غير** قابلة للاشتقاق.

a) $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0 \\ \sin 2x, & x\le 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0 \\ \cos 2x, & x\le 0 \end{cases}$

1D-9

أوجد قيم الثوابت a، b التي من أجلها تكون الدالة التالية قابلة للاشتقاق ولكن **غير** مستمرة.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0 \\ \cos 2x, & x\le 0 \end{cases}$$

1D-10* بين أنَّ :

$g(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لها عدم استمرارية قابل للحذف عند $h=0$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f'(a)$ موجودة.

1E- صيغ الاشتقاق: كثيرات الحدود، الجداءات، حاصل القسمة

1E-1

أوجد مشتقات كثيرات الحدود التالية:

a) $x^{10}+3x^5+2x^3+4$

b) e^2+1 (e=قاعدة اللوغاريتم الطبيعي)

c) $x/2+\pi^3$

d) $(x^3+x)(x^5+x^2)$

1E-2

أوجد عكس المشتقات لكثيرات الحدود التالية:

a) $ax+b$ (a و b ثابتتان)

b) $x^6+5x^5+4x^3$

c) $(x^3+1)^2$

1E-3

أوجد النقاط (x,y) في المنحنى $y=x^3+x^2-x+2$ التي يكون عندها الميل أفقياً.

1E-4

في كل مما يلي، أوجد قيم a و b التي من أجلها تكون الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق.

a) $$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4, & x\le 0; \\ 5x^5+3x^4+7x^2+8x+4, & x>0, \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4, & x\le 1; \\ 5x^5+3x^4+7x^2+8x+4, & x>1, \end{cases}$$

1E-5

أوجد مشتقة الدوال الكسرية التالية:

(a $\dfrac{x}{1+x}$ (b $\dfrac{x+a}{x^2+1}$ (a ثابت)

(c $\dfrac{x^4+1}{x}$ (d $\dfrac{x+2}{x^2-1}$

1F. قاعدة السلاسل، الاشتقاق الضمني

1F-1

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a) $(x^2+2)^2$ (طريقتين)

b) $(x^2+2)^{100}$ أي من الطريقتين في (a) تفضل؟

1F-2

أوجد مشتقة $x^{10}(x^2+1)^{10}$.

1F-3

أوجد $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة لـ $y=x^{1/n}$ عن طريق الاشتقاق الضمني.

1F-4

احسب $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة لـ $x^{1/3}+y^{1/3}=1$ بالاشتقاق الضمني. ثم قم بالحل من أجل y واحسب y' باستعمال قاعدة السلاسل. تحقق من أنَّ إجابتيك متماثلتان.

1F-5

أوجد كل نقاط المنحنى (المنحنيات) $\sin x+\sin y=1/2$ التي لها خطوط مماسية أفقية. (هذه مجموعة من المنحنيات ذات نمط دوري، مكررة لأن المعادلة لا تتغير عند التحويل $y\to y+2\pi$ و $x\to x+2\pi$.)

1F-6

بين أنَّ مشتقة دالة زوجية هي فردية وأنَّ مشتقة دالة فردية هي زوجية.

(اكتب معادلة تنص على أنَّ f زوجية، واشتق الحدين كليهما، باستعمال قاعدة السلاسل)

1F-7

احسب المشتقات. افرض أنَّ كل الحروف تمثل ثوابتاً، عدا المتغيرات المتعلقة أو المستقلة عن بعضها بعضاً والتي تظهر في المشتقات.

a) $D=\sqrt{(x-a)^2+y_0^2}$ $\quad \dfrac{dD}{dx}=?$

b) $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad \dfrac{dm}{dv}=?$

c) $F=\dfrac{mg}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}$ $\quad \dfrac{dF}{dr}=?$

d) $Q=\dfrac{at}{\left(1+bt^2\right)^3}$ $\quad \dfrac{dQ}{dt}=?$

1F-8

احسب المشتقات بالاشتقاق الضمني. (الافتراض نفسه فيما يخص الحروف كما في التمرين السابق.)

a) $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$، $\quad \dfrac{dr}{dh}=?$

b) $PV^c=nRT$، $\quad \dfrac{dP}{dV}=?$

c) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$، $\quad \dfrac{da}{db}=?$

1G- المشتقات من الدرجة العليا

1G-1

احسب y'' بالنسبة إلى الدوال التالية.

a) $3x^2+2x+4\sqrt{x}$

b) $\dfrac{x}{x+5}$

c) $\dfrac{-5}{x+5}$

d) $\dfrac{x^2+5x}{x+5}$

1G-2

أوجد كل الدوال $f(x)$ التي مشتقتها الثالثة $f'''(x)$ مساوية للـ0. ("مساوية" هي كلام الرياضيات يعني "دائماً" أو "لكل قيمة لـ x".)

1G-3

احسب y'' باستعمال الاشتقاق الضمني وبسط جوابك قدر الإمكان.

$$x^2a^2+y^2b^2=1$$

1G-4

أوجد صيغة المشتقة ذات الدرجة n $y^{(n)}$ لـ$y=1/(x+1)$.

1G-5

لتكن $y=u(x)v(x)$.

a) أوجد y'، y'' و y'''.

b) الصيغة العامة لـ $y^{(n)}$، المشتقة n، تسمى صيغة لايبنز: تستعمل المعاملات نفسها مثل نظرية كثير الحدود، وتكون على الشكل التالي:

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)}+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)}+\cdots+uv^{(n)}$$

استعمل هذا للتحقق من إجاباتك في الجزء (a)، واستعمله لحساب $y^{(p+q)}$ ، إذا كانت $y=x^p(1+x)^q$.

1H- الدوال الأسية واللوغارتمات: الجبر

1H-1

إن نصف العمر λ لمادة مشعة تندثر وفقاً للقانون $y = y_0 e^{kt}$ هو معرف على أنه المدة الزمنية التي تأخذها كمية من المادة المشعة لتتناقص إلى $1/2$ الكمية الأصلية y_0.

a) عبر عن نصف العمر λ بدلالة k. (قم بإيجاد الصيغة بنفسك – ولا تكتفِ فقط بالتعويض في الصيغ المعطاة هنا أو في أي مكان آخر.)

b) بين باستعمال (a) أنه إذا كانت الكمية عند الزمن t_1 هي y_1، إذن عند الزمن $t_1+\lambda$ ستكون $y_1/2$ بغض النظرعما سيكون t_1.

1H-2

إذا مُدِد محلول يحوي على تركيز ثقيل من شوارد الهيدروجين (على سبيل المثال، حمض قوي) بحجم مساوٍ من الماء، كم سيتغيرالـ pH تقريباً؟ (عبر عن $(\mathrm{pH})_{\text{الممدد}}$ بدلالة $(\mathrm{pH})_{\text{الأصلي}}$.)

1H-3

حل ما يلي من أجل y:

a) $\ln(y+1)+\ln(y-1)=2x+\ln x$

b) $\log(y+1)=x^2+\log(y-1)$

c) $2\ln y=\ln(y+1)+x$

1H-4

حل $\dfrac{\ln a}{\ln b}=c$ من أجل a بدلالة b و c؛ ثم كرر هذا، بتغيير $\ln$ بـ $\log$.

1H-5

حل من أجل x (تلميح: ضع $u=e^x$، حل أولاً من أجل u):

$y = e^x + e^{-x}$ (b

$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = y$ (a

1H-6

أوجد قيمة العدد $A = \log e \cdot \ln 10$ (انطلق في معالجة هذه المسألة من المفاهيم الأساسية) . ومن ثم عمم المسألة، ثم كرر الحساب.

1H-7

شدة الصوت بالديسيبل هي $L = 10\log_{10}(I/I_0)$ حيث I، مقاسة بالواط في المتر المربع، هي شدة الصوت، و $I_0 = 10^{-12}$ watt/m^2 هو الصوت الأنعم عند 1000 Hz. عادة ما يكون مجال الموسيقى الكلاسيكية من 30 إلى 100 ديسيبل. عتبة الصوت المؤلم لأذن الإنسان هو حوالي 120 ديسيبل.

a) نفترض أن ضجيج محرك نفاث على بعد 50 متراً حوالي 130. وحديثاً عادياً على بعد 1 متر هو حوالي 60. ما هي نسبة شدة الصوتين.

b) نفترض أنَّ شدة الصوت متناسبة مع مقلوب مربع البعد عن الصوت. ارتكازاً على هذه القاعدة، احسب مستوى الديسيبل لصوت المحرك النفاث عن بعد 100 متر، عن بعد 1 كلم.[1]

***1H-10**

المسافة المتوسطة لبعد كل كوكب عن الشمس والزمن الدوري لاكمال دورة حول الشمس هي كما يلي.[2]
(المسافة محسوبة بملايين الكيلومترات والزمن بالسنوات الأرضية.)

عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
57.9	108	150	228	778	1.430	2.870	4.500	5.900
0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248

[1] قانون مقلوب المربع مثبت بحقيقة أنَّ الشدة تقاس بالطاقة في وحدة الزمن على وحدة المساحة. عندما ينقل الصوت مسافة r، تنتشر طاقة الصوت على شكل كرة نصف قطرها r متمركزة عند مصدر الصوت. مساحة الكرة متناسبة مع r^2، إذن يكون متوسط الشدة متناسباً مع $1/r^2$. لحسن الحظ بالنسبة للأشخاص الذين يقطنون بجانب المطارات، الصوت لا ينتقل كما أشرنا آنفاً حيث أن جزءاً من هذه الطاقة يبدد على شكل حرارة في الهواء و جزءاً آخر يبدد على شكل اهتزازات للمواد العازلة الموجودة في الطريق من مصدر الصوت إلى المستمع.

[2] من أساسيات الفيزياء، لـ D. Halliday and R.Resnick

a) أوجد نمطاً لهذه المعطيات بـرسم منحنى بياني لـ $(\ln x, \ln y)$ حيث x هو المسافة إلى الشمس و y هو الزمن الدوري للكواكب الأربعة الأولى (من عطارد إلى المريخ). لاحظ أنَّ هذه النقاط تقع تقريباً على خط مستقيم. ارسم خطاً بالمسطرة وقدر قيمة الميل. (يمكنك التحقق من ميلك الذي وجدته بحساب الميول التي تربط النقاط المتتالية.)

b) باستعمال تقريب الميل m الذي وجدته في الجزء (a) إلى أقرب خانتين رقميتين، أعطِ الصيغة من أجل y على الشكل:

$$\ln y = m \ln x + x$$

(استعمل الأرض لتقدير c.)

c) حل من أجل y وشكل جدولاً من القيم المتوقعة لأدوار كل الكواكب اعتماداً على بعدها عن الشمس. (يجب أن يكون جوابك دقيقاً مقرباً لواحد بالمائة.)

d) للأرض نصف قطر يقارب $6{,}000\ \mathrm{km}$ ويقع القمر عن بعد $382{,}000\ \mathrm{km}$. زمن الدورة الكاملة للقمر هو الشهر القمري، سنعتبره 28 يوماً. نفرض أنَّ الميل m هو نفسه بالنسبة إلى الدوران حول الأرض كما وجدته من أجل الدوران حول الشمس في (a). أوجد المسافة فوق سطح الأرض للمدار المتزامن مع الأرض، أي ارتفاع مدار القمر الصناعي الذي يقع في مكان واحد على خط الاستواء. (بالنسبة لقمر صناعي قريب من سطح الأرض، من المهم أن نعلم أنَّ y هي المسافة المتوقعة من القمر الصناعي إلى مركز الأرض. لهذا أنت بحاجة إلى معرفة نصف قطر الأرض.)

e) أوجد الزمن اللازم لدورة كاملة للقمر الصناعي الذي يدور على ارتفاع $1{,}000\ \mathrm{km}$.

1I- الدوال الأسية واللوغارتمية: الحساب

1I-1

احسب المشتقات

a) xe^x b) $(2x-1)e^{2x}$ c) e^{-x^2}

d) $x\ln x - x$ e) $\ln(x^2)$ f) $(\ln x)^2$

g) $\left(e^{x^2}\right)^2$ h) x^x i) $\left(e^x + e^{-x}\right)/2$

j) $\left(e^x - e^{-x}\right)/2$ k) $\ln(1/x)$ l) $1/\ln x$

m) $\left(1-e^x\right)/\left(1+e^x\right)$

1I-2

ارسم بيانياً $y = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$.

1I-3

قيم $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. تلميح: اجعل $h = 1/n$ ، واستعمل $(d/dx)\ln(1+x)\big|_{x=0} = 1$.

b) استنتج أنَّ $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1I-4

باستعمال $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ، احسب:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n}$

***1I-5**

إذا استثمرت P دولار بمعدل فوائد سنوية r، فبعد سنة واحدة ستكون الفوائد $I = rP$ دولاراً، والمبلغ الكلي هو $A = P + I = P(I + r)$. هذه *فائدة بسيطة*.

بالنسبة إلى *الفائدة المتراكمة*، فإن السنة تقسم إلى k مدة متساوية الزمن، وتحسب الفائدة وتضاف في نهاية كل فترة. إذن في نهاية المدة الأولى، $A = P\left(1 + r\left(\frac{1}{k}\right)\right)$؛ وهو المبلغ الجديد للمدة الثانية، والتي في نهايتها يكون المبلغ قد أصبح

$$A = P\left(1 + r\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1 + r\left(\frac{1}{k}\right)\right)،$$

نستمر بهذه الطريقة، وفي نهاية السنة يكون المبلغ:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k}.$$

الفائدة البسيطة التي تكسب في سنة واحدة ما تكسبه الفائدة المتراكمة r هي:

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k} - 1$$

ما يكافئ هذه الفائدة يسمى في لغة البنوك "المعدل النسبي السنوي" أو APR.[3]

a) احسب APR لـ 5% المتراكمة شهرياً، يومياً[4]، وباستمرار. التراكم المستمر يعني النهاية عندما k تؤول إلى ما لا نهاية.

b) كما في الجزء (a)، احسب APR لـ 10% متراكمة شهرياً، نصف شهرياً $(k = 26)$، يومياً، وباستمرار. (اهتممنا أيضاً بالمعدل نصف الشهري لأنه يمكن أيضًا للقروض أن تدفع كل نصف شهر.)

---

[3] يطلب من البنك تقديم ما يسمى بالـ APR عندما يوفر القرض. الـ APR يأخذ أيضاً بعين الاعتبار بعضاً من المصاريف البنكية، تدعى نقاط. للأسف، ليست كل المصاريف متضمنة في الـ APR والتكاليف الحقيقية تكون أكبر إذا دفع القرض مبكراً.

[4] بالنسبة للفائدة المتراكمة اليومية نفترض أن في السنة 365 يوماً، و ليس 365.25. البنك جد حذر بهذا الفرق الطفيف. إذا اطلعت على الجدول الرسمي للفوائد في الزمن السابق لوجود الآلات الحاسبة، فستلاحظ أنها تنقص بمبلغ صغير لأن القانون الأميركي يسمح للبنك أن يعتبر بأنَّ السنة تتألف من 360 يوماً.

1J- الدوال المثلثية

1J-1

احسب مشتقات الدوال التالية:

$\sin(5x^2)$ (a $\quad$ $\sin^2(3x)$ (b $\quad$ $\ln(\cos(2x))$ (c

$\ln(2\cos x)$ (d $\quad$ $\frac{\sin x}{x}$ (e $\quad$ $\cos(x+y)$ ؛ $y=f(x)$ (f

$\cos(x+y)$ ؛ y ثابت (g $\quad$ $e^{\sin^2 x}$ (h $\quad$ $\ln(x^2\sin x)$ (i

$e^{2x}\sin(10x)$ (j $\quad$ $\tan^2(3x)$ (k $\quad$ $\sec\sqrt{1-x^2}$ (l

m) الدوال الثلاث التالية لها المشتقات نفسها: $\cos(2x)$، $\cos^2 x-\sin^2 x$ و $2\cos^2 x$. تحقق من هذا. هل الدوال الثلاث متساوية؟ علل.

$\sec(5x)\tan(5x)$ (n $\quad$ $\sec^2(3x)-\tan^2(3x)$ (o $\quad$ $\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ (p

$\cos^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (q $\quad$ $\tan^2\left(\frac{x}{x+1}\right)$ (r

1J-2

احسب $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2}$ بربطها إلى قيمة $(\cos x)'$.

1J-3

a) ليكن $a>0$ ثابت. أوجد بدلالة a قيمة $k>0$ التي من أجلها يكون كل من $y=\sin(kx)$ و $y=\cos(kx)$ يحقق:

$y''+ay=0$.

استعمل هذه القيمة لـ k في كل الأجزاء التالية.

b) بين أنَّ $y=c_1\sin(kx)+c_2\cos(kx)$ هي أيضاً حل للمعادلة في (a)، من أجل أي ثوابت c_1 و c_2.

c) بين أنَّ الدالة $y=\sin(kx+\phi)$ (التي تمثيلها البياني هو عبارة عن موجة جيبية بفرق في الطور ϕ) التي تحقق أيضاً المعادلة في (a)، من أجل أي ثابت ϕ.

d) بين أنَّ الدالة في (c) متضمنة في دوال الجزء (b)، وذلك باستعمال صيغة الجمع المثلثي من أجل دالة الجيب. بعبارة أخرى، من أجل قيم معلومة لـ k و ϕ، أوجد قيم c_1 و c_2 التي يكون من أجلهما

$$\sin(kx+\phi)=c_1\sin(kx)+c_2\cos(kx)$$

1J-4

a) بين أنَّ القاطع لدائرة نصف قطرها يساوي الواحد، وبزاوية θ يكون طوله $\sqrt{2-2\cos\theta}$. استنتج من صيغة نصف الزاوية:

$$\sin(\theta/2)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

بأنَّ طول الحبل هو:

$$2\sin(\theta/2)$$

b) احسب محيط متساوي الأضلاع من الدرجة n والذي تقع رؤوسه على بعد 1 من المركز. بين أنّه عندما تؤول n إلى ما لا نهاية، يؤول المحيط إلى 2π، وهو محيط دائرة نصف قطرها يساوي 1.

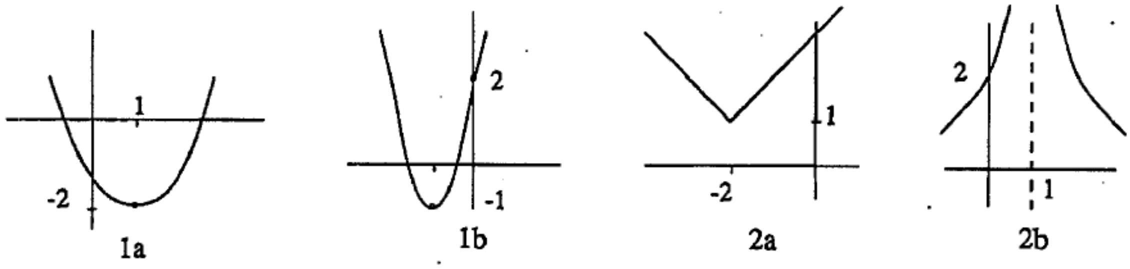
حل مسائل الوحدة 1. الاشتقاق

1A. التمثيل البياني

1A-1,2

$y=(x-1)^2-2$ (a

$y=3(x^2+2x)+2=3(x^2+1)^2-1$ (b



1A-3

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3-3x}{1-(-x)^4}=\dfrac{-x^3-3x}{1-x^4}=-f(x)$ (a ، إذاً فهي فردية

$(\sin(-x))^2=(\sin x)^2$ (b ، إذاً فهي زوجية

$\dfrac{\text{فردية}}{\text{زوجية}}$ (c ، إذاً فهي فردية

$(1-x)^4\neq\pm(1+x)^4$ (d : لا فردية ولا زوجية

$J_0\left((-x)^2\right)=J_0\left(x^2\right)$ (e ، إذا فهي زوجية.

1A-4

$p(x)=p_e(x)+p_0(x)$ (a ، أين $p_{e(x)}$ هو مجموع القوى الزوجية و $p_0(x)$ هو مجموع القوى الفردية.

$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ (b

$F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ هي أيضاً زوجية $G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ هي فردية لأن:

$F(-x)=\dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=F(x)$ ؛ $G(-x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(-x)$

c) استعمل الجزء b:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{-x+a}=\frac{2a}{(x+a)(-x+a)}=\frac{2a}{a^2-x^2}$$ زوجية

$$\frac{1}{x+a}-\frac{1}{-x+a}=\frac{-2x}{(x+a)(-x+a)}=\frac{-2x}{a^2-x^2}$$ فردية

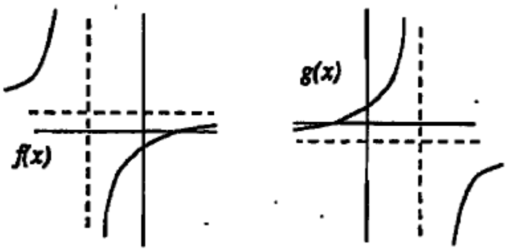
$$\Rightarrow \frac{1}{x+a}=\frac{a}{a^2-x^2}-\frac{x}{a^2-x^2}$$

1A-5

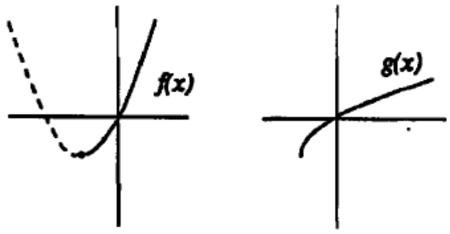
a) $y=\dfrac{x-1}{2x+3}$. قم بجداء الطرفين والوسطين وحل من أجل x، ستحصل على $x=\dfrac{3y+1}{1-2y}$، إذا فإن مقلوب الدالة هو $\dfrac{3x+1}{1-2x}$.

b) $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$

(قيد المجال إلى $x\le -1$، حيث إنه عند قلبه حول $y=x$، ستبقى حاصلاً على منحنى الدالة.) نحل من أجل x، نحصل على $x=\sqrt{y+1}-1$، إذاً مقلوب الدالة هو $y=\sqrt{x+1}-1$.



5a



5b

1A-6

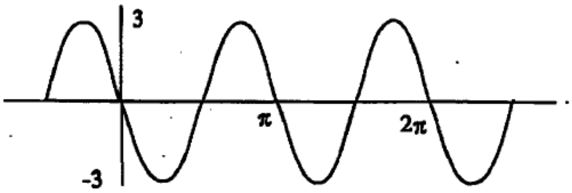
(a $A=\sqrt{1+3}=2$ ، $\tan c=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$ ، $c=\dfrac{\pi}{3}$. إذا فإن $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(b $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

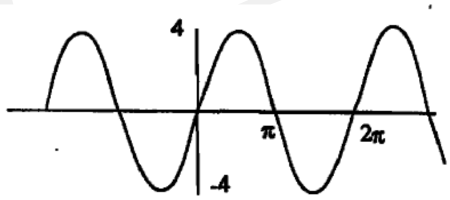
1A-7

(a $3\sin(2x-\pi)=3\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ، السعة 3، الدور π ، زاوية الطور $\pi/2$.

(b $-4\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=4\sin x$ السعة 4، الدور 2π ، زاوية الطور 0.



7a



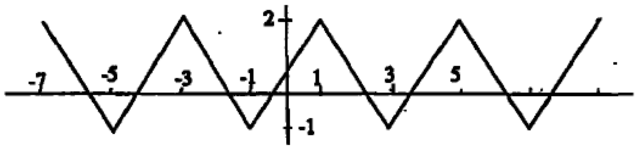
7b

1A-8

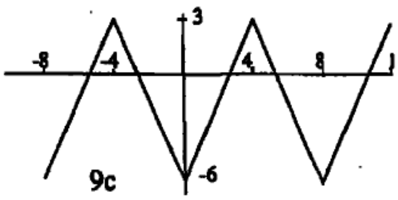
$\Rightarrow f(0)=0$ $\Rightarrow f(0)=-f(0)$ فردية $f(x)$.

إذا $0=\dots=f(2c)=f(c)$ ، أيضا (باستخدام دورية الدالة، حيث c هو الدور).

1A-9



9ab period = 4



9c

c) المنحنى مكون من قطع تربط $(0,-6)$ إلى $(4,3)$ إلى $(8,-6)$. إنها تتكرر كأسنان المنشار بدور يساوي 8. *يمكن اشتقاقه باستعمال:

$$g(0)=3f(-1)-3=-6 \quad \text{و} \quad x/2-1=-1 \quad \Rightarrow \quad x=0$$
$$g(4)=3f(1)-3=3 \quad \text{و} \quad x/2-1=1 \quad \Rightarrow \quad x=4$$
$$g(8)=3f(3)-3=-6 \quad \text{و} \quad x/2-1=3 \quad \Rightarrow \quad x=8$$

1B. السرعة ومعدل التغير

1B-1

a) $h=$ ارتفاع الأنبوب $= 400-16t^2$.

السرعة المتوسطة $= \dfrac{h(2)-h(0)}{2} = \dfrac{(400-16\cdot 2^2)-400}{2} = -32\text{ft/sec}$

(الإشارة السالبة تعني أن أنبوب الاختبار يتجه نحو الأسفل. يمكنك أيضاً القيام بكل المسألة باستعمال الدالة $s(t)=16t^2$، ممثلاً المسافة المقاسة إلى الأسفل من الأعلى. في تلك الحالة، تكون كل السرعات موجبة بدلاً من أن تكون سالبة.)

b) حل $h(t)=0$ (أو $s(t=400)$) لإيجاد لحظة الهبوط $t=5$. ومنه فإن السرعة المتوسطة بالنسبة للثانيتين الأخيرتين تكون:

$$\frac{h(5)-h(3)}{2} = \frac{0-(400-16\cdot 3^2)}{2} = -128\text{ ft/sec}$$

c)
$$\begin{aligned}\frac{h(t)-h(5)}{t-5} &= \frac{400-16t^2-0}{t-5} = \frac{16(5-t)(5+t)}{t-5}\\ &= -16(5+t) \quad \to \quad -160\text{ ft/sec}\end{aligned}$$ عندما $t\to 5$

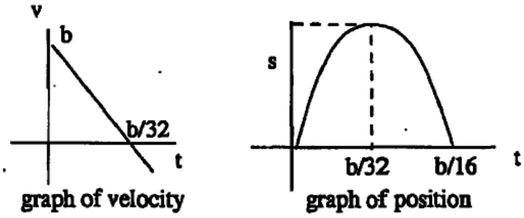
1B-2

ترتد كرة التنس بحيث تكون سرعتها الابتدائية مباشرة نحو الأعلى b قدم في الثانية. ارتفاعها s بالقدم عند اللحظة t هو:

$$s = bt-16t^2$$

a)
$$\begin{aligned}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} &= \frac{b(t+h)-16(t+h)^2-(bt-16t^2)}{h}\\ &= \frac{bt+bh-16t^2-32th-16h^2-bt+16t^2}{h}\\ &= \frac{bh-32th-16h^2}{h}\\ &= b-32t-16h \to \quad b-32t\end{aligned}$$ عندما $h\to 0$

وبالتالي، فإن $v=b-32t$.



b) تصل الكرة إلى ارتفاعها الأقصى بالضبط عندما تكمل صعودها. تمثل هذه اللحظة عندما $v(t)=0$، أي، $t=b/32$.

c) الارتفاع الأقصى هو $s(b/32)=b^2/64$.

d) منحنى v عبارة عن خط مستقيم بميل -32. منحنى s عبارة عن قطع زائد بحد أعلى في المكان الذي تكون فيه $v=0$ عند $t=b/32$ ولحظة الهبوط عند $t=b/16$.

e) إذا كانت السرعة الابتدائية عند الارتداد الأول $b_1=b$، وسرعة الارتداد الثاني هي b_2، فإذاً $b_2^2/64=(1/2)b_1^2/64$. وبالتالي، $b_2=b_1/\sqrt{2}$. الارتداد الثاني يحدث عند $b_1/16+b_2/16$.

f) إن استمرت الكرة بالارتداد فإن لحظة الهبوط حسب السلاسل الهندسية تكون:

$$b_1/16+b_2/16+b_3/16+\ldots \quad = b/16+b/16\sqrt{2}+b/16\left(\sqrt{2}\right)^2+\ldots$$
$$=(b/16)\left(1+\left(1/\sqrt{2}\right)+\left(1/\sqrt{2}\right)^2+\ldots\right)$$
$$=\frac{b/16}{1-\left(1/\sqrt{2}\right)}$$

بطريقة أخرى، ستتوقف الكرة عن الارتداد بعد $1/\left(1-\left(1/\sqrt{2}\right)\right)\approx 3.4$ مضروبة بمدة زمن الارتداد الأول.

1C. الميل والاشتقاق

1C-1

a)

$$\frac{\pi(r+h)^2-\pi r^2}{h}=\frac{\pi\left(r^2+2rh+h^2\right)-\pi r^2}{h}=\frac{\pi\left(2rh+h^2\right)}{h}$$
$$=\pi(2r+h)$$
$$\to 2\pi r \quad \text{عندما} \quad h\to 0$$

b)

$$\frac{(4\pi/3)(r+h)^3-(4\pi/3)r^3}{h}=\frac{(4\pi/3)\left(r^3+3r^2h+3rh^2+h^3\right)-(4\pi/3)r^3}{h}$$
$$=\frac{(4\pi/3)\left(3r^2h+3rh^2+h^3\right)}{h}$$
$$=(4\pi/3)\left(3r^2+3rh+h^2\right)$$
$$\to 4\pi r^2 \quad \text{عندما} \quad h\to 0$$

1C-2

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=g(x)\to g(a) \quad \text{عندما} \quad x\to a$$

1C-3

a)

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2(x+h)+1}-\frac{1}{2x+1}\right]=\frac{1}{h}\left[\frac{2x+1-(2(x+h)+1)}{(2(x+h)+1)(2x+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{h}\left[\frac{-2h}{(2(x+h)+1)(2x+1)}\right]$$
$$=\frac{-2}{(2(x+h)+1)(2x+1)}$$
$$\to\frac{-2}{(2x+1)^2} \quad \text{عندما} \quad h\to 0$$

(b

$$\frac{2(x+h)^2+5(x+h)+4-(2x^2+5x+4)}{h} = \frac{2x^2+4xh+2h^2+5x+5h-2x^2-5x}{h}$$

$$= \frac{4xh+2h^2+5h}{h} = 4x+2h+5$$

$$\to 4x+5 \quad \text{عندما} \quad h=0$$

(c

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{(x^2+1)-((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{x^2+1-x^2-2xh-h^2-1}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{-2xh-h^2}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{-2x-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}$$

$$\to \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{عندما} \quad h\to 0$$

(d المقام المشترك

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}\right]$$

الآن نبسط البسط بضرب البسط والمقام في $\sqrt{x}+\sqrt{x+h}$ ، واستعمال $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x+h})^2}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right]$$

$$\to \frac{-1}{2(\sqrt{x})^3} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \quad \text{عندما} \quad h\to 0$$

e) بالنسبة للجزء (a)، $-2/(2x+1)^2<0$، إذن لا وجود لنقاط عندما يكون الميل 1 أو 0. بالنسبة للميل -1،

$$-2/(2x+1)^2=-1 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)^2=2 \quad \Rightarrow 2x+1=\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow x=-1/2\pm\sqrt{2}/2$$

بالنسبة إلى الجزء (b) فإن الميل هو 0 عند $x=-5/4$، 1 عند $x=-1$ و -1 عند $x=-3/2$.

1C-4 باستعمال المسألة 3،

a) $f'(1)=-2/9$ و $f(1)=1/3$، إذن $y=-(2/9)(x-1)+1/3=(-2x+5)/9$

b) $f(a)=2a^2+5a+4$ و $f'(a)=4a+5$ إذن:

$$y=(4a+5)(x-a)+2a^2+5a+4=(4a+5)x-2a^2+4$$

c) $f(0)=1$ و $f'(0)=0$، إذن $y=0(x-0)+1$، أو $y=1$.

d) $f(a)=1/\sqrt{a}$ و $f'(a)=-(1/2)a^{-3/2}$، إذن

$$y=-(1/2)a^{3/2}(x-a)+1/\sqrt{a}=-a^{-3/2}x+(3/2)a^{-1/2}$$

1C-5

الطريقة 1.

$y'(x)=2(x-1)$، إذن الخط المماسي المار من خلال $(a,1+(a-1)^2)$ هو

$$y=2(a-1)(x-a)+1+(a-1)^2$$

من أجل معرفة إذا كان المبدأ ينتمي إلى هذا الخط، نعوض $x=0$ و $y=0$، للحصول على المعادلة التالية من أجل a.

$$0=2(a-1)(-a)+1+(a-1)^2=-2a^2+2a+1+a^2-2a+1=-a^2+2$$

و بالتالي $a=\pm\sqrt{2}$ والخطان المماسان المارين من المبدأ هما

$$y=2(\sqrt{2}-1)x \qquad \text{و} \qquad y=-2(\sqrt{2}+1)x$$

(بما أنهما خطان ماران بالمبدأ، تحذف الحدود الثابتة: هذا جيد للتحقق من العمليات الجبرية !)

الطريقة 2.

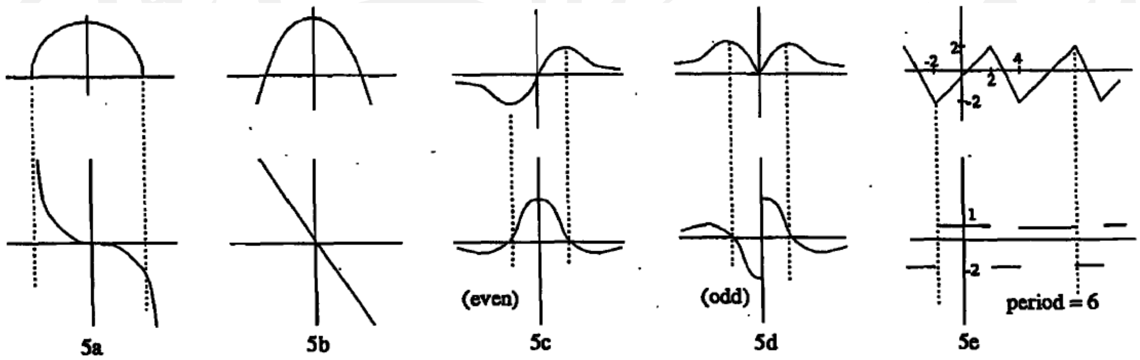
ابحث عن خطوط مماسية من الشكل $y = mx$. افترض أن $y = mx$ يلتقي مع $y = 1+(x-1)^2$، عند $x = a$، ثم $ma = 1+(a-1)^2$. بالإضافة إلى ذلك نريد الميل $y'(a) = 2(a-1)$ على أن يكون مساوٍ لـ m، إذن $m = 2(a-1)$. بالتعويض من أجل m نجد:

$$2(a-1)a = 1+(a-1)^2$$

وهذه معادلة الطريقة 1 نفسها: $a^2 - 2 = 0$، $a = \pm\sqrt{2}$ و $m = 2(\pm\sqrt{2}-1)$، والخطان المماسيان الماران من المبدأ هما كما سبق،

$$y = 2(\sqrt{2}-1)x \qquad \text{و} \qquad y = -2(\sqrt{2}+1)x$$

61C-



1D. النهايات والاستمرارية

1D-1

احسب النهايات التالية إن وجدت. إن لم توجد، حدد ما إذا كانت $+\infty$، $-\infty$ أو غير معرفة.

a) -4

b) $8/3$

c) غير معرفة (كل من $\pm\infty$ ممكنتان)

d) لاحظ أنَّ $2-x$ سالب عندما يكون $x>2$، إذن النهاية هي $-\infty$

e) لاحظ أنَّ $2-x$ موجب عندما يكون $x<2$، إذن النهاية هي $+\infty$ (يمكن أيضا كتابة ∞)

f) $x\to\infty$ عندما $\dfrac{4x^2}{x-2}=\dfrac{4x}{1-(2/x)}\to\dfrac{\infty}{1}=\infty$

g) $x\to\infty$ عندما $\dfrac{4x^2}{x-2}-4x=\dfrac{4x^2-4x(x-2)}{x-2}=\dfrac{8x}{x-2}=\dfrac{8}{1-(2/x)}\to 8$

i) $x\to\infty$ $\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2-2x+4}=\dfrac{1+(2/x)+(3/x^2)}{3-(2/x)+4/x^2}\to\dfrac{1}{3}$

j) $x\to 2$ عندما $\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}\to\dfrac{1}{4}$

1D-2

a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{-4}=\infty$ (نهايتا اليمين و اليسار متطابقتين)

d) $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$ (نهايتا اليمين و اليسار متطابقتين)

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$

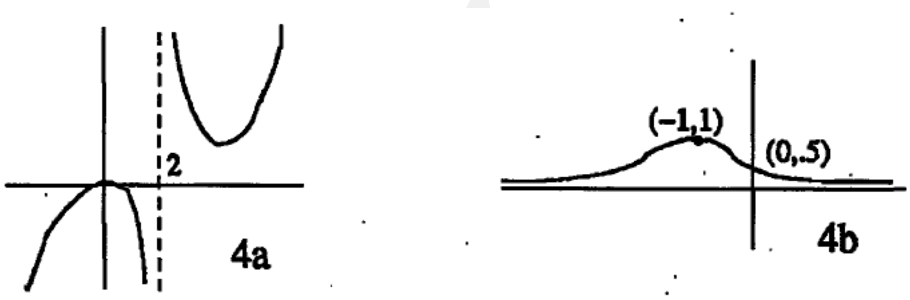
1D-3

a) $x=2$ يمكن حذفها   b) $x=-2$ لا نهائية   b) $x=0,\pm\pi,\pm2\pi...$ لا نهائية

c) $x=0$ يمكن حذفها   d) $x=0$ يمكن حذفها   e) $x=0$ قفزة

f) $x=0$ يمكن حذفها

1D-4



1D-5

a) بالنسبة إلى الاستمرارية، نريد أن تكون $ax+b=1$ عندما $x=1$. الجواب: كل من a، b بحيث $a+b=1$

b) $\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^2)}{dx}=2x=2$ عندما $x=1$. لدينا أيضاً $\frac{d(ax+b)}{dx}=a$. لذلك، لجعل $f'(x)$ مستمرة، نريد $a=2$.

بضم ذلك إلى الشرط $a+b=1$ من الجزء (a)، نحصل في النهاية $b=-1$، $a=2$.

1D-6

a) $f(0)=0^2+4\cdot0+1=1$. تتطابق مع قيم الدالة:

$f(0^-)=\lim_{x\to0} ax+b=b$ ،   إذن $b=1$ بالاستمرارية.

بعد ذلك تطابق الميول:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0} 2x+4=4$$

و $f'(0^-)=a$. وبالتالي فإن $a=4$ مادامت $f'(0)$ موجودة.

b) $f(1)=1^2+4\cdot1+1=6$ و $f(1^-)=\lim_{x\to 1} ax+b=a+b$

وبالتالي فإن الاستمرارية تعني أنَّ $a+b=6$. الميل من اليمين هو

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1} 2x+4=6$$

بالتالي فإنه يجب أن يساوي هذا الميل من اليسار، الذي هو a . بحيث $a=6$ و $b=0$.

1D-7

$f(1)=c1^2+4\cdot1+1=c+5$ و $f(1^-)=\lim_{x\to 1} ax+b=a+b$

وبالتالي فإنَّه بواسطة الاستمرارية، $c+5=a+b$. ثم، طابق الميول من اليمين ومن اليسار:

$f'(1^+)=\lim_{x\to 1} 2cx+4=2c+4$ و $f'(1^-)=\lim_{x\to 1} a=a$

إذاً،

$a=2c+4$ و $b=-c+1$

1D-8

a) $f(0)=\sin(2\cdot0)=0$ و $f(0^+)=\lim_{x\to 0} ax+b=b$

و بالتالي فإن الاستمرارية تعني $b=0$. الميل من كل جانب يساوي

$f'(0^-)\lim_{x\to 0} 2\cos(2x)=2$ و $f'(0^+)=\lim_{x\to 0} a=a$

ولذلك فإننا بحاجة إلى أن تكون $a\neq 2$ لكي تكون f غير قابلة للاشتقاق.

$f\left(0^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 0} ax+b=b$ و $f\left(0\right)=\cos\left(2\cdot 0\right)=1$ (b

و بالتالي فإن الاستمرارية تعني أنَّ $b=1$. الميل من كل جهة يكون

$f'\left(0^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 0} a=a$ و $f'\left(0^{-}\right)=\lim\limits_{x\to 0} -2\sin\left(2x\right)=0$

إذاً يجب أن تكون $a\neq 0$ لكي تكون f غير قابلة للاشتقاق.

1D-9

لا يمكن أن تكون أية قيمة من هذه، لأن كل دالة قابلة للاشتقاق تكون مستمرة.

1E. صيغ الاشتقاق: كثيرات الحدود، الجداءات، حواصل القسمة

1E-1

أوجد مشتقات كثيرات الحدود التالية:

a) $10x^9 + 15x^4 + 6x^2$

b) 0 ($e^2 + 1 \approx 8.4$ هو ثابت ومشتقة الثابت تساوي الصفر.)

c) $1/2$

d) باستخدام قاعدة الضرب: $(3x^2+1)(x^5+x^2)+(x^3+x)(5x^4+2x) = 8x^7+6x^5+5x^4+3x^2$. وبالمقابل، اضرب كثير الحدود أولاً للحصول على $x^8+x^6+x^5+x^3$ ومن ثم قم بالاشتقاق.

1E-2

أوجد عكس الاشتقاق لكثير الحدود

a) $ax^2/2+bx+c$، حيث a و b هما ثابتان معطيان و c هو الثابت الثالث.

b) $x^7/7+(5/6)x^6+x^4+c$

c) الطريقة الوحيدة للحصول على هذا هي بضربها: x^6+2x^3+1. الآن يمكنك أخذ عكس الاشتقاق لكل حد منفصل للحصول على:

$$\frac{x^7}{7}+\frac{x^4}{2}+x+c$$

انتباه: الإجابة ليست $(1/3)(x^3+1)^3$. (المشتق لن يتطابق إذا طبقنا قاعدة السلاسل، على أن تعالج القاعدة لاحقاً في 4E.)

1E-3

$(3x-1)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2+2x-1=0$. ومنه $x=1/3$ أو $x=-1$ والنقاط هي $(1/3, 49/27)$ و $(-1, 3)$

1E-4

a) $f(0)=4$ ، و $f(0^-)=\lim_{x\to 0} 5x^5+3x^4+7x^2+8x+4=4$. لذلك فإن الدالة مستمرة لكل قيم المتغيرات.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0} 25x^4+12x^3+14x+8=8 \text{ و } f'(0^+)=\lim_{x\to 0} 2ax+b=b$$

لذا فإن، $b=8$ ويمكن لـ a أن تكون أية قيمة.

b) $f(1)=a+b+4$ و $f(1^+)=5+3+7+8+4=27$. إذاً بواسطة الاستمرارية،

$a+b=23$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1} 2ax+b=2a+b \qquad f'(1^+)=\lim_{x\to 1} 25x^4+12x^3+14x+8=59$$

وبالتالي فإن قابلية الاشتقاق تعني

$$2a+b=59$$

بطرح المعادلة الأولى، $a=59-23=36$ ومنه $b=-13$.

1E-5

a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ b) $\dfrac{1-2ax-x^2}{(x^2+1)^2}$ c) $\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

d) $3x^2-1/x^2$

1F. قاعدة السلاسل، الاشتقاق الضمني

1F-1

a) لتكن $u = (x^2+2)$

$$\frac{d}{dx}u^2 = \frac{du}{dx}\frac{d}{du}u^2 = (2x)(2u) = 4x(x^2+2) = 4x^3+8x$$

بالمقابل،

$$\frac{d}{dx}(x^2+2)^2 = \frac{d}{dx}(x^4+4x^2+4) = 4x^3+8x$$

b) لتكن $u = (x^2+2)$؛ إذن $\frac{d}{dx}u^{100} = \frac{du}{dx}\frac{d}{du}u^{100} = (2x)(100u^{99}) = 200x(x^2+2)^{99}$.

1F-2

قاعدة الجداء وقاعدة السلاسل:

$$10x^9(x^2+1)^{10} + x^{10}\left[10(x^2+1)^9(2x)\right] = 10(3x^2+1)x^9(x^2+1)^9$$

1F-3

$y = x^{1/n} \Rightarrow y^n = x \Rightarrow ny^{n-1}y' = 1$. وبالتالي،

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1-n} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

1F-4

$(1/3)x^{-2/3} + (1/3)y^{-2/3}y' = 0$ تعني

$$y' = -x^{-2/3}y^{2/3}$$

نضع $u = 1 - x^{1/3}$. ثم $y = u^3$ فقاعدة السلاسل تعني:

$$\frac{dy}{dx}=3u^2\frac{du}{dx}=3\left(1-x^{1/3}\right)^2\left(-(1/3)x^{-2/3}\right)=-x^{-2/3}\left(1-x^{1/3}\right)^2$$

إجابة طريقة قاعدة السلاسل تساوي إجابة طريقة الاشتقاق الضمني لأن:

$$y=\left(1-x^{1/3}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad y^{2/3}=\left(1-x^{1/3}\right)^2$$

1F-5

الاشتقاق الضمني يعطي $\cos x+y'\cos y=0$. الميل الأفقي يعني $y'=0$، بحيث $\cos x=0$. وهي النقاط $x=\pi/2+k\pi$ لكل عدد طبيعي k. تذكر أنَّ $\sin(\pi/2+k\pi)=\left(-1^k\right)$، على سبيل المثال 1 إذا كان k زوجياً و -1 إذا كان k فردياً. بحيث إنه عند $x=\pi/2+k\pi$، $\pm1+\sin y=1/2$، أو $\sin y=\mp1+1/2$. لكن $\sin y=3/2$ ليس لها حلول، إذاً الحلول الوحيدة هي عندما يكون k زوجياً وفي تلك الحالة يكون $\sin y=-1+1/2$، بحيث $y=-\pi/6+2n\pi$ أو $y=7\pi/6+2n\pi$. على العموم يوجد شبكتان من النقاط عند زوايا المربعات التي أطوال أضلاعها 2π، أي النقاط

$(\pi/2+2k\pi,-\pi/6+2n\pi)$ و $(\pi/2+2k\pi,7\pi/6+2n\pi)$؛ k,n أي عدد طبيعي.

1F-6

باتباع التلميح، ليكن $z=-x$. إذا كانت f زوجية، إذن $f(x)=f(z)$ بالاشتقاق واستعمال قاعدة السلاسل:

$$f'(x)=f'(z)(dz/dx)=-f'(z) \quad \text{لأن} \quad dz/dx=-1$$

لكن هذا يعني أنَّ f' فردية. بالمثل، إذا كانت g فردية، إذن $g(x)=-g(z))$. بالاشتقاق واستعمال قاعدة السلاسل:

$$g'(x)=-g'(z)(dz/dx)=g'(z) \quad \text{لأن} \quad dz/dx=-1$$

1F-7

$$\frac{dD}{dx}=\frac{1}{2}\left((x-a)^2-{y_0}^2\right)^{-1/2}\left(2(x-a)\right)=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+{y_0}^2}} \quad (a$$

$$\frac{dm}{dv}=m_0\cdot\frac{-1}{2}\left(1-v^2/c^2\right)^{-3/2}\cdot\frac{-2v}{c^2}=\frac{m_0v}{c^2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} \quad (b$$

$$\frac{dF}{dr}=mg\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1+r^2\right)^{-5/2}\cdot 2r=\frac{-3mgr}{\left(1+r^2\right)^{5/2}} \quad (c$$

$$\frac{dQ}{dt}=at\cdot\frac{-6bt}{\left(1+bt^2\right)^4}+\frac{a}{\left(1+bt^2\right)^3}=\frac{a\left(1+5bt^2\right)}{\left(1+bt^2\right)^4} \quad (d$$

1F-8

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{1}{3}\pi\left(2rr'+r^2\right) \quad\Rightarrow\quad r'=\frac{-r^2}{2rh}=\frac{-r}{2h} \quad (a$$

$$PV^c=nRT \quad\Rightarrow\quad P'V^c+P\cdot cV^{c-1}=0 \quad\Rightarrow\quad P'=-\frac{cPV^{c-1}}{V^c}=-\frac{cP}{V} \quad (b$$

تعني $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ (c

$$0=2aa'+2b-2\left(\cos\theta\left(a'b+a\right)\right) \quad\Rightarrow\quad a'=\frac{-2b+2\cos\theta\cdot a}{2a-2\cos\theta\cdot b}=\frac{a\cos\theta-b}{a-b\cos\theta}$$

1G. المشتقات من الدرجات العليا

1G-1

a) $6-x^{-3/2}$ b) $\frac{-10}{(x+5)^3}$ c) $\frac{-10}{(x+5)^3}$ d) 0

1G-2

إذا كانت $y'''=0$ ، فإن $y''=c_0$ ، a ثابت. ومنه $y'=c_0x+c_1$ ، مع c_1 هو ثابت معين آخر. ثم، $y=c_0x^2/2+c_1x+c_2$ ، مع c_2 هو أيضا ثابت آخر. بحيث يجب على y أن تكون كثير حدود تربيعي، وأي كثير حدود تربيعي له خاصية وهي أن مشتقته الثالثة تساوي الصفر.

1G-3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \Leftarrow \quad y'=-(b^2/a^2)(x/y)$$

بحيث،

$$\begin{aligned} y'' &= -\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)=-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{y+x(b^2/a^2)(x/y)}{y^2}\right) \\ &= -\left(\frac{b^4}{y^3a^2}\right)(y^2/b^2+x^2/a^2)=-\frac{b^4}{a^2y^3} \end{aligned}$$

1G-4

$y=(x+1)^{-1}$ ، إذن $y^{(1)}=-(x+1)^{-2}$ ، $y^{(2)}=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$ و

$$y^{(3)}=(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$$

النمط هو

$$y^{(n)}=(-1)^n(n!)(x+1)^{-n-1}$$

1G-5

a) $y' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv''$

b) ترتبط الصيغ أعلاه بصيغة "لايبنيتز" من أجل $n=1$ و $n=2$. لحساب $y^{(p+q)}$ عندما $y = x^p(1+x)^q$، استعمل $u = x^p$ و $v = (1+x)^q$. الحد الوحيد في صيغة "لايبنتز" الذي لا يساوي الصفر هو $\binom{n}{k}u^{(p)}v^{(q)}$، بما أنَّه في كل الحدود الأخرى إما معامل واحد أو آخر يساوي 0. إذا كانت x^p، $u^{(p)} = p!$، إذن:

$$y^{(p+q)} = \binom{n}{p}p!\,q! = \frac{n!}{p!\,q!}\cdot p!\,q! = n!$$

1H. الأسية واللوغاريتم: الجبر

1H-1

a) لرؤية متى يكون $y = y_0/2$ ، فإنه يجب علينا حل المعادلة $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{kt}$ ، أو $\frac{1}{2} = e^{kt}$.

خذ ln الطرفين كليهما: $-\ln 2 = kt$ ، من $t = -\frac{\ln 2}{k}$ ($k < 0$ مادامت المادة تندثر)

b) $y_1 = y_0 e^{kt_1}$ بالتقدير، $\lambda = \frac{-\ln 2}{k} y_0 e^{k(t_1+\lambda)} = y_0 e^{kt_1} \cdot e^{k\lambda} = y_1 \cdot e^{-\ln 2} = y_1 \cdot \frac{1}{2}$

1H-2

$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$ ؛ بالتقدير، $[\mathrm{H}^+]_{dil} = \frac{1}{2}[\mathrm{H}^+]_{orig}$. خذ $-\log_{10}$ للطرفين كليهما (لاحظ أنَّ $\log 2 \approx .3$):

$$-\log[\mathrm{H}^+]_{dil} = \log 2 - \log[\mathrm{H}^+]_{orig} \qquad \Rightarrow \qquad pH_{dil} = pH_{orig} + \log_2$$

1H-3

a) $\ln(y+1) + \ln(y-1) = 2x \ln x$ ؛ برفع الطرفين كليهما إلى الأس والحل من أجل y y نجد:

$$(y+1)(y-1) = e^{2x} \cdot x \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = xe^{2x} \Rightarrow \quad y = \sqrt{xe^{2x} + 1}, \quad \text{مادام} \quad y > 0$$

b) $\log(y+1) - \log(y-1) = -x^2$ ؛ بالرفع إلى الأس، $\frac{y+1}{y-1} = 10^{-x^2}$. الحل من أجل y ؛ لتبسيط الجبر،

ليكن $A = 10^{-x^2}$. جداء الطرفين في الوسطين، $y + 1 = Ay - A \Rightarrow \quad y = \frac{A+1}{A-1} = \frac{10^{-x^2}+1}{10^{-x^2}-1}$

c) $2\ln y - \ln(y+1) = x$ ؛ برفع الطرفين كليهما إلى الأس والحل من أجل y :

$$\frac{y^2}{y+1} = e^x \quad \Rightarrow \quad y^2 - e^x y - e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^x \sqrt{e^{2x} + 4e^x}}{2}, \quad \text{مادام} \quad y - 1 > 0$$

1H-4

$$a = e^{c\ln b} = e^{\ln b^c} = b^c \quad \Rightarrow \quad \ln a = c\ln b \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln a}{\ln b} = c.$$

بالمثل، $a = b^c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\log a}{\log b} = c$.

1H-5

(a ضع $u = e^x$ (اضرب ما في الأسفل والأعلى في e^x أولاً): $y = \dfrac{u^2+1}{u^2-1}$؛ يعطي هذا $e^{2x} = u^2 = \dfrac{y+1}{y-1}$؛ خذ اللوغارتم $\ln$: $2x = \ln\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$، $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$

(b $y = e^x + e^{-x}$؛ بوضع $u = e^x$ نجد $y = u + \dfrac{1}{u}$؛ الحل من أجل u يعطي $u^2 - yu + 1 = 0$

بحيث $e^x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2} = u$؛ بأخذ $\ln$: $x = \ln\left(\dfrac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}\right)$

1H-6

$A = \log e \cdot \ln 10 = \ln\left(10^{\log e}\right) = \ln(e) = 1$؛ بالمثل، $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

1H-7

(a إذا كانت I_1 تمثل شدة صوت الطائرة النفاثة و I_2 تمثل شدة صوت الحديث، فإن

$$\log_{10}(I_1/I_2) = \log_{10}\left(\frac{I_1/I_0}{I_2/I_0}\right) = \log_{10}(I_1/I_0) - \log_{10}(I_2/I_0) = 13 - 6 = 7$$

و بالتالي فإن، $I_1/I_2 = 10^7$.

b) $I = C/r^2$ و $I = I_1$ عندما $r = 50$ يعني

$$I_1 = C/50^2 \quad \Rightarrow \quad C = I_1 50^2 \quad \Rightarrow \quad I = I_1 50^2 / r^2$$

يبين هذا أنه عندما $r = 100$ ، يكون لدينا $I = I_1 50^5 / 100^2 = I_1 / 4$. نستنتج أنَّ

$$10\log_{10}(I/I_0) = 10\log_{10}(I_1/4I_0) = 10\log_{10}(I_1/I_0) - 10\log_{10} 4 \approx 130 - 6.0 \approx 124$$

الصوت عند 100 متر يكون 124 ديسيبل.

الصوت عند 1 كيلومتر تكون شدته 1/100 من شدة الصوت عند 100 متر، لأن $100\text{m}/1\text{km} = 1/10$

$$10\log_{10}(1/100) = 10(-2) = -20$$

إذا فإن مستوى الديسيبل يكون $124 - 20 = 104$.

1I. الأسية واللوغاريتم: الحساب

1I-1

a) $(x+1)e^{x}$ b) $4xe^{2x}$ c) $(-2x)e^{-x^2}$

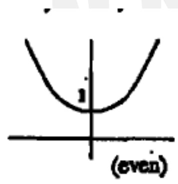
d) $\ln x$ e) $2/x$ f) $2(\ln x)/x$ g) $4xe^{2}x^{2}$

h) $\left(x^{x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = (x\ln x)'e^{x\ln x} = (\ln x+1)e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^{x}$

i) $\left(e^{x}-e^{-x}\right)/2$ j) $\left(e^{x}+e^{-x}\right)/2$ k) $-1/x$ l) $-1/x(\ln x)^{2}$

m) $-2e^{x}/\left(1+e^{x}\right)^{2}$

1I-2



1I-3

a) عندما $n\to\infty$، $h=1/n\to 0$.

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln(1+h)}{h}=\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}\underset{h\to 0}{\to}\frac{d}{dx}\ln(1+x)\Big|_{x=0}=1$$

و بالتالي،

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

b) نأخذ لوغاريتم الطرفين كليهما. نحن بحاجة لإظهار:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\ln e=1$$

لكن:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

إذن تكون النهاية نفسها في الجزء (a)

1I-4

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \to e^3$ عندما $n\to\infty$،

b) ضع $m = n/2$. إذن

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{10m} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{10} \to e^{10}$$ عندما $m\to\infty$

c) ضع $m = 2n$. إذن

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{5m/2} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{5/2} \to e^{5/2}$$ عندما $m\to\infty$

J1. الدوال المثلثية

1J-1

a) $10x\cos(5x^2)$ b) $6\sin(3x)\cos(3x)$

c) $-2\sin(2x)/\cos(2x) = -2\tan(2x)$

d) $-2\sin x/(2\cos x) = -\tan x$. (لماذا يختفي المعامل 2؟ لأن $\ln(2\cos x) = \ln 2 + \ln(\cos x)$، ومشتقة الثابت $\ln 2$ تساوي الصفر.)

e) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ f) $-(1+y')\sin(x+y)$ g) $-\sin(x+y)$ h) $2\sin x\cos x e^{\sin^2 x}$

i) $\dfrac{2}{x} + \cot x = \dfrac{2x\sin x + x^2\cos x}{x^2\sin x} = \dfrac{(x^2\sin x)'}{x^2\sin x}$. كبديل،

$\ln(x^2\sin x) = \ln(x^2) + \ln(\sin x) = 2\ln x + \ln\sin x$

يعطي الاشتقاق $\dfrac{2}{x} + \cot x = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

j) $2e^{2x}\sin(10x) + 10e^{2x}\cos(10x)$ k) $6\tan(3x)\sec^2 = 6\sin x/\cos^3 x$

l) $-x(1-x^2)^{-1/2}\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

m) بتكرار استعمال قاعدة السلاسل والصيغة المثلثية للزاوايا المزدوجة،

$$\begin{aligned}
(\cos^2 x - \sin^2 x)' &= -2\cos x\sin x - 2\sin x\cos x = -4\cos x\sin x;\\
(2\cos^2 x)' &= -4\cos x\sin x;\\
(\cos(2x))' &= -2\sin(2x) = -2(1\sin x\cos x).
\end{aligned}$$

للدوال الثلاث المشتق نفسه، أي تختلف بالثوابت. وبالفعل فإن:

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1$، (باستعمال $\sin^2 x = 1 - \cos^{2x}$).

n)

$$5(\sec(5x)\tan(5x))\tan(5x) + 5(\sec(5x)\sec^2(5x)) = 5\sec(5x)(\sec^2(5x) + \tan^2(5x))$$

أشكال أخرى $5\sec(5x)\left(2\sec^2(5x)-1\right)$؛ $10\sec^3(5x)-5\sec(5x)$

o) 0 لأن $\sec^2(3x)-\tan^2(3x)=1$، ثابتة – حلها من أجل التدريب.

p) الاستعمال المتكرر لقاعدة السلاسل:

$$\left(\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

q) قاعدة السلاسل في كثير من المرات مكررة:

$$\left(\cos^2\sqrt{1-x^2}\right)' = 2\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(-\sin\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\left(2\sqrt{1-x^2}\right)$$

r) قاعد السلاسل مرة أخرى:

$$\left(\tan^2\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)' = 2\tan\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot\sec^2\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}\tan\left(\frac{x}{x+1}\right)\sec^2\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1J-2

بما أنَّ $\cos(\pi/2)=0$،

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x-\cos(\pi/2)}{x-\pi/2}=\frac{d}{dx}\cos x\Big|_{x=\pi/2}=-\sin x\Big|_{x=\pi/2}=-1$$

1J-3

a) $\left(\sin(kx)\right)'=k\cos(kx)$. ومنه

$$(\sin(kx))'' = (k\cos(kx))' = -k^2\sin(kx)$$

بالمثل، فإن اشتقاق جيب التمام مرتين يحوله إلى الجيب ثم مرة أخرى إلى جيب التمام بتغيير واحد في الإشارة، بحيث

$$(\cos(kx))'' = -k^2\cos(kx)$$

وبالتالي،

$$\sin(kx)'' + k^2\sin(kx) = 0 \quad \text{و} \quad \cos(kx)'' + k^2\cos(kx) = 0$$

بما أننا افترضنا أنَّ $k > 0$، $k = \sqrt{a}$.

b) يستخلص هذا من خطية عملية الاشتقاق. مع $k^2 = a$،

$$\begin{aligned}
&\left(c_1\sin(kx) + c_2\cos(kx)'' + k^2\sin(kx) + c_2\cos(kx)\right)\\
&= c_1(\sin(kx))'' + c_2(\cos(kx))'' + k^2c_1\sin(kx) + k^2c_2\cos(kx)\\
&= c_1\left[(\sin(kx))'' + k^2\sin(kx)\right] + c_2\left[(\cos(kx))'' + k^2\cos(kx)\right]\\
&= c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

c) بما أنَّ ϕ ثابتة، $d(kx+\phi)/dx = k$، و $(\sin(kx+\phi))' = k\cos(kx+\phi)$

$$(\sin(kx+\phi))'' = (k\cos(kx+\phi))' = -k^2\sin(kx+\phi)$$

وبالتالي، فإنه إذا كانت $a = k^2$،

$$(\sin(kx+\phi))'' + a\sin(kx+\phi) = 0$$

d) تقول صيغة جمع دالة الجيب:

$$(\sin(kx+\phi)) = \sin(kx)\cos(\phi) + \cos(kx)\sin(\phi)$$

بكلمات أخرى

$$\sin(kx+\phi)=c_1\sin(kx)+c_2\cos(kx)$$

مع $c_1=\cos(\phi)$ و $c_2=\sin(\phi)$.

1J-4

a) نظرية فيثاغورث تعني أنَّ

$$c^2=\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta=2-2\cos\theta$$

حيث،

$$c=\sqrt{2-2\cos\theta}=2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=2\sin(\theta/2)$$

b) كل زاوية تساوي $\theta=2\pi/n$، بحيث يكون محيط المضلع ذي الـn ضلع:

$$n\sin(2\pi/n)$$

عندما $n\to\infty$، $h=2\pi/n$ يؤول إلى 0، بحيث

$$n\sin(2\pi/n)=\frac{2\pi}{h}\sin h=2\pi\frac{\sin h-\sin 0}{h}\to 2\pi\frac{d}{dx}\sin\Big|_{x=0}=2\pi cos x\Big|_{x=0}=2\pi$$