1A. المتجهات

*- المفهوم: **الاتجاه** هو عبارة عن متجه الوحدة. حيث أن اتجاه المتجه **A** يعرف بالصيغة التالية:

$$dir\ \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \ : \ (\boldsymbol{A} \neq 0)$$

ويقصد بذلك أن متجه الوحدة يقع على طول المتجه **A** ويشير بنفس اتجاه المتجه **A** أيضاً (وليس باتجاه **A-**) .

1A-1: أوجد القيمة العددية والاتجاه الصحيح (اعتمد الصيغة في الأعلى) للمتجهات التالية:

(a $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ **(b** $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

(c $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

1A-2 ما هي قيمة/قيم c التي تجعل الصيغة $(\frac{1}{5}\ \boldsymbol{i} - \frac{1}{5}\ \boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k})$ متجه وحدة؟

1A-3.

a) إذا كانت $Q = (0,1,1)$ و $P = (1,3,-1)$ ، أوجد قيمة $\boldsymbol{A} = PQ$ ، $|\boldsymbol{A}|$ ، والاتجاه $\boldsymbol{dir\ A}$.

b) متجه **A** قيمته العددية 6 واتجاهه $(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})/3$ ، فإذا كان ذيل هذا المتجه عند النقطة $(-2,0,1)$ ، فأين يقع رأسه؟

1A-4

a) لتكن النقطتين P، Q تقعان في الفضاء، و $\boldsymbol{X}$ هي نقطة المنتصف بين النقطتين Q و P. ولتكن النقطة O هي نقطة ما ثابتة.

بيّن صحة العلاقة بين المتجهات $\boldsymbol{OX} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{OP} + \boldsymbol{OQ})$.

b) بالاعتماد على التعبير الرياضي للجزء السابق (a)، افترض أن النقطة X تقسم القطعة المستقيمة PQ بالنسبة $r : s$، حيث $r + s = 1$. أوجد التعبير الرياضي لِـ $\boldsymbol{OX}$ باستخدام $\boldsymbol{OQ}$ و $\boldsymbol{OP}$.

1A-5. أوجد المركبات الموافقة لـ **i** و **j** للمتجه **A** الذي يبلغ طوله 3 ويقع في مستوي إحداثيات، حيث أن هذا المتجه يكوّن زاوية مقدارها 30° مع متجه الوحدة **(i)** وزاوية مقدارها 60° مع متجه الوحدة **(j)**. هل الشرط الثاني عديم الأهمية؟

1A-6. طائرة صغيرة تحاول التحليق باتجاه الشمال بسرعة 200 (ميل \ساعة) "كما ينظر إليها من مستوى الارض"، بينما يوجد تيار هوائي من جهة الشمال الشرقي يجري بسرعة 50 (ميل \ساعة). أوجد السرعة الاتجاهية اللازمة للطائرة لكي تستطيع التحليق (اوجد الناتج بالنسبة إلى المركبتين **i** و **j**).

1A-7. ليكن $\boldsymbol{A} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j}$ متجه في مستوي الإحداثيات؛ أوجد باستخدام **a** و **b** المتجهين **A′** و**A″** الناتجين عن تدوير المتجه **A** مقدار 90°:

a) مع عقارب الساعة **b)** عكس عقارب الساعة.

(تلميح: اجعل المتجه **A** قطر لمستطيل أضلاعه على المحاور x و y ومن ثم أدر كامل المستطيل.)

c) لتكن $\boldsymbol{i}' = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})/5$. أثبت أن **i'** هو متجه وحدة، واستخدم الجزء الأول من هذا التمرين لإيجاد المتجه **j'** وذلك بحيث يكون المتجهين **i'** و **j'** يمثلان محوران متعامدان لمستوي إحداثيات.

1A-8. في الاستخدامات الهندسية غالباً ما يعبر عن اتجاه المتجه في الفضاء (انظر المفهوم في الأعلى) **بجيب تمام الزاوية**. لإيضاح ذلك سنعتبر أن $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ هو متجه في الفضاء، وأيضاً متجه من نقطة المبدأ، ولتكن α، β، و ϰ ثلاث زوايا ($\leq \pi$)والتي تمثل الزوايا التي يُكَونها المتجه **A** مع ***i***، ***j*** و ***k*** بالترتيب.

a) أثبت أن $\boldsymbol{dir}\,\boldsymbol{A} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$.

(المعاملات الثلاثة تسمى جيب تمام زاوية الاتجاه للمتجه **A**)

b) عبِّر عن جيب تمام زاوية الاتجاه للمتجه A بالمعاملات a, b, c؛ وأوجد جيب تمام زاوية الاتجاه للمتجه

$$-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

c) برهن أن الأرقام الثلاثة t, u, v هي جيب تمام زاوية الاتجاه لمتجهٍ في الفضاء، وذلك فقط، وفقط إذا كانت هذه الأرقام تحقق المعادلة $t^2 + u^2 + v^2 = 1$.

1A-9. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصف ضلعي مثلث تكون موازية للضلع الثالث ويبلغ طولها نصف طول هذا الضلع (الثالث). *(اعتبر الضلعين هما A و B)*

1A-10. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن نقاط المنتصف لأضلاع شكل رباعي في الفضاء تشكل متوازي الأضلاع.

1A-11. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن أقطار متوازي الأضلاع تنصف بعضها البعض. (إحدى الطرق هي باعتبار النقطتين X و Y هما منتصف قطري متوازي الأضلاع ؛ وبالتالي أثبت أن X=Y)

1A-12.** الرؤوس الأربعة للمتوازي الأضلاع هي ***OPQR بالترتيب عكس عقارب الساعة. أثبت أن القطعة المستقيمة من النقطة ***O*** إلى منتصف المسافة بين ***PQ*** تقطع القطر ***PR*** عند النقطة ***X*** والتي تقع على بعد 1/3 من الرأس ***P*** إلى ***R***. (لتكن $\boldsymbol{A = OP}$ و $\boldsymbol{B = OR}$ ؛ عبر عن كل شيء بالنسبة لِـ **A** و **B**).

***1A-13.**

a) مثلث رؤوسه ***PQR*** على المستوي الإحداثي، أثبت كمتجهات أن $PQ + QR + RP = 0$.

b) تابع الجزء (a) ، ليكن **A** متجه له نفس طول ***PQ*** وعامودي عليه، ويتجه إلى خارج المثلث؛ بشكل مشابه استخدم المتجهين **B** و **C** للضلعين الآخرين. أثبت أن $\boldsymbol{A + B + C = 0}$.

(الحل عبارة عن جملة واحدة وبدون أية عمليات حسابية)

***1A-14.** عمّم الأجزاء (a, b) من التمرين السابق لتكوّن مضلع مغلق في مستوي الإحداثيات بحيث لا يقطع المضلع نفسه (أي أن المضلع له منطقة داخلية واحدة)؛ سمّي رؤوس هذا المضلع **(P1,P2,P3,……..Pn)** بالترتيب.

1A-15.** لتكن النقاط **(P1, P2,……..,Pn)** هي رؤوس مضلع عدد أضلاعه n في المستوي الإحداثي، ولتكن النقطة ***O هي مركز هذا المضلع؛ أظهِر وبدون القيام بالعمليات الحسابية أو معرفة الإحداثيات أن :

$OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_n = 0$، وذلك:

a) إذا كانت n رقم زوجي.

b) إذا كانت n عدد فردي.

1B. الضرب النقطي (القياسي)

1B-1. أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهات التالية:

a) $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ و $4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ **b)** $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ و $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

1B-2. ما هي قيم c *التي تجعل المتجهين* $(\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ و $(c\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$:

a) *متعامدين.* **b)** *يشكلان زاوية حادة.*

1B-3. باستخدام المتجهات، أوجد الزاوية المحصورة بين أطول قطر $\boldsymbol{PQ}$ لمكعب و:

a) القطر $\boldsymbol{PR}$ لأحد أوجه المكعب.

b) الضلع $\boldsymbol{PS}$ لنفس المكعب (اختر حجم وموقع المكعب بطريقة تجعل العمليات الحسابات سهلة)

1B-4. ثلاث نقط في الفضاء: $R:(a,-1,3),\ Q:(0,1,1),\ P:(a,1,-1)$ ،

ما هي قيم a التي تجعل النقاط $\boldsymbol{PQR}$ تشكل : **a)** زاوية قائمة. **b)** زاوية حادة.

1B-5. أوجد مركبة القوة التالية $(\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ في:

a) الاتجاه $\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$.

b) اتجاه المتجه $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$.

1B-6. لتكن النقطة $\boldsymbol{O}$ هي نقطة المبدأ، حيث c هو رقم معطى و u هو اتجاه معطى (أي أنه متجه وحدة)؛ اشرح هندسياً موضع جميع النقاط P في الفضاء والتي تحقق معادلة المتجه $\boldsymbol{OP}.\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{OP}|$. بتعبير أدق أوجد قيم c التي تجعل موضع النقاط يشكل:

a) مستوي إحداثيات. **b)** شعاع "اي نصف خط". **c)** فارغاً أو خالياً. { تلميح: قسِّم على |OP| }

1B-7.

a) أثبت أن $(\boldsymbol{j}'=\frac{-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}})$ و $(\boldsymbol{i}'=\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}})$ هما متجهي وحدة متعامدين ويشكلان الطرف الأيمن من مستوي الإحداثيات.

b) عبر عن المتجه $\boldsymbol{A = 2i - 3j}$ بالنسبة إلى متجهي الوحدة ($\boldsymbol{i'}$ و $\boldsymbol{j'}$) وذلك باستخدام الضرب النقطي (القياسي)

c) أعد حل الجزء (b) ولكن بطريقة مختلفة، وذلك عن طريق إيجاد الحل بالنسبة لمتجهي الوحدة ($\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$) معبراً عنهما بمتجهي الوحدة ($\boldsymbol{i'}$ و $\boldsymbol{j'}$) ومن ثم عوض بالناتج في معادلة المتجه **A**.

1B-8. المتجهات $\boldsymbol{i' = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}}$, $\boldsymbol{j' = \frac{i-j}{\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{k' = \frac{i+j-2k}{\sqrt{6}}}$ هي متجهات وحدة متعامدة على بعضها البعض وتشكل الجزء الأيمن من مستوي الإحداثيات:

a) أثبت ذلك.

b) عبّر عن المتجه $\boldsymbol{A = 2i + 2j - k}$ في نظام المحاور هذا (راجع التمرين 1B-7b)

1B-9. ليكن **A** و **B** هما متجهين على مستوي الإحداثيات، مع مراعاة أن كلاهما ليس مضاعفاً للأخر؛ عبّر عن **B** كمجموع متجهين أحدهما هو مضاعف للمتجه **A** والآخر هو متجه عمودي على المتجه **A**. (أوجد الجواب معبراً عنه بالمتجهين **A** و **B**).

(تلميح: لتكن $\boldsymbol{u = dir\ A}$ ؛ ما هي المركبة u للمتجه **B**)

1B-10. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن أقطار الشكل متوازي الأضلاع لديها نفس الطول فقط إذا كان هذا الشكل هو مستطيل.

1B-11. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن أقطار الشكل متوازي الأضلاع متعامدة فقط إذا كان هذا الشكل هو معيَّن (حيث أن أطوال الأضلاع الأربعة للمعيَّن متساوية).

1B-12. أثبت باستخدام طريقة المتجهات (بدون استخدام المركبات) أن أي زاوية محيطية لنصف دائرة هي زاوية قائمة.

1B-13. أثبت صحة الدالة المثلثية $\{\cos(\theta_1 - \theta_2) = cos\theta_1 cos\theta_2 + sin\theta_1 sin\theta_2\}$ ؟

(تلميح: اعتبر أن متجهي وحدة يشكلا الزوايا (θ_1 و θ_2) مع المحور X الموجب.)

1B-14. أثبت صحة قانون جيب تمام الزاوية $(c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\theta)$ وذلك باستخدام القانون الجبري للضرب النقطي (القياسي) بالإضافة إلى مفهومه الهندسي.

***1B-15. "**عدم المساواة لـِ **(كوشي- شوارز)" ؛**

a) أثبت من التعريف الهندسي للضرب النقطي (القياسي) معادلة عدم المساواة للمتجهات التالية والموجودة إما على المستوي الإحداثي أو في الفضاء:

$$|\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \ .....(*)\text{،}$$

ما هي الظروف التي تجعل هذه المعادلة "معادلة مساواة"؟؟

b) إذا كانت هذه المتجهات هي متجهات على المستوي الإحداثي، اكتب معادلة عدم المساواة لهذا الشرط وعبر عن ذلك بالمركبات $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ لهذه المتجهات.

c) أعط حلاً آخر لمعادلة عدم المساواة السابقة (*) باتباع ما يلي (هذا الحل يعمم إلى فضاء متعدد الأبعاد):

i) لجميع قيم t يكون لدينا $(\mathbf{A}+\mathbf{tB}).(\mathbf{A}+\mathbf{tB}) \geq \mathbf{0}$.

ii) استخدم القانون الجبري للضرب النقطي (القياسي) وذلك لكتابة الصيغة الرياضية في الجزء (i) كمعادلة من الدرجة الثانية معبِراً عنها بـ t.

iii) متعدد الحدود التي حصلنا عليها من الجزء(i) تحوي على الأكثر صفراً (جذراً) واحداً؛ وهذا يدل على أن معاملات المعادلة التربيعية يجب أن تحقق معادلة عدم مساواة معينة – ما هي؟؟

1C. المحددات

1C-1. احسب قيمة المحددات التالية: **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ ؟؟

1C-2. احسب $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ وذلك باستخدام مفكوك (**لابلاس**) عن العوامل المساعدة لِـ:

a) الصف الأول. **b)** العامود الأول.

1C-3. أوجد مساحة المثلث الموجود على مستوي الإحداثيات، والذي رؤوسه تقع عند النقط التالية:

a-) $(0,0), (1,2), (1,-1)$ **b-)** $(1,2), (1,-1), (2,3)$

1C-4. أثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$.

"هذا النوع من المحددات يسمى بـ(**محددة فاندرموندي**)"

1C-5.

a) أثبت أن قيمة محددة "2x2" هي قيمة لا تتغير إذا أضفنا إلى الصف الثاني فيها مضاعفات القيمة العددية للصف الأول.

b) نفس السؤال في الجزء السابق (a) بتطبيق التغيير على الأعمدة بدلاً من الصفوف.

1C-6. استخدم مفكوك (**لابلاس**) والتمرين 5a لإثبات أن قيمة محددة "3x3" هي قيمة لا تتغير إذا أضفنا إلى الصف الثاني فيها مضاعف الصف الثالث.

1C-7. ليكن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) متجهي وحدة. أوجد أكبر قيمة للدالة $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ؟؟

***1C-8.** إذا كانت قاعدة متوازي الأسطح هي متوازي الأضلاع والذي أضلاعه هي المتجهات **b** و **c**، والضلع الثالثة لمتوازي الأسطح هي المتجه **a**. (ذيل المتجهات الثلاثة تنطلق من نفس الرأس):

a) أثبت أن حجم متوازي الأسطح **abc** هو $\pm \boldsymbol{a} \,.\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ ؟

b) أثبت أن : $\boldsymbol{a} \,.\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ = (المحددة التي صفوفها عبارة عن مركبات المتجهات الثلاثة **a,b,c** على التوالي).

(الجزئين السابقين هما اثبات لـ (3) ،" تفسير حجم المحددة "3x3")

1C-9. استعمل المعادلة الرياضية في التمرين (1C-8) لحساب حجم رباعي الأسطح والذي رؤوسه الأربعة هي: $(1,2,1), (0,1,-1), (0,-1,2), (0,0,0)$ (حجم رباعي الأسطح = 1/3 (القاعدة) (الارتفاع)).

1C-10. بالاعتماد على التمرين (8) ، أثبت أنه من أجل ثلاثة متجهات من نقطة المبدأ وتقع على نفس المستوي الإحداثي، تكون المحددة التي تحتوي على المتجهات الثلاثة كصفوفها الثلاثة تساوي صفر.

1D. الضرب الاتجاهي

1D-1. أوجد ($\boldsymbol{A \times B}$) إذا:

a) $\boldsymbol{A = i - 2j + k}$ ، $\boldsymbol{B = 2i - j - k}$ **b)** $\boldsymbol{A = 2i - 3k}$ ، $\boldsymbol{B = i + j - k}$

1D-2. أوجد مساحة المثلث الموجود في الفضاء والذي رؤوسه هي النقاط:

$\boldsymbol{P}: (2,0,1)$، $\boldsymbol{Q}: (3,1,0)$، $\boldsymbol{R}: (-1,1,-1)$

1D-3. متجهان i' و j' للطرف الأيمن من مستوي الإحداثيات لديهما نفس اتجاه المتجهين :

$\boldsymbol{A = 2i - j}$ و $\boldsymbol{B = i + 2j + k}$ بالترتيب؛ أوجد المتجهات الثلاثة i'، j'، و k'.

1D-4. برهن أن الضرب الاتجاهي في الحالة العامة لا يحقق الخاصية التجميعية (الدمج). أي باستخدام المتجهات **i**، **i** ، و **j** أثبت أن: $\boldsymbol{(i \times i) \times j \neq i \times (i \times j)}$

1D-5. ما الذي يمكنك أن تستخلصه عن المتجهين **A** و **B**:

a) إذا كان $\boldsymbol{|A \times B| = |A||B|}$

b) إذا كان $\boldsymbol{|A \times B| = A.B}$

1D-6. ثلاثة أوجه لمكعب وحدة تشترك بنفس الرأس P؛ كل وجه من هذه الأوجه لديه قطر ينتهي عند النقطة P؛ ما هو حجم متوازي الأسطح الذي لديه هذه الأقطار الثلاثة كأضلاع ذات حدود مشتركة؟؟

1D-7. أوجد حجم رباعي السطوح الذي تقع رؤوسه عند النقاط الأربعة الآتية:

$P: (1,0,1)$، $Q: (-1,1,2)$، $R: (0,0,2)$، $S: (3,1,-1)$

(تلميح: حجم رباعي الأسطح = 1/6 (حجم متوازي الأسطح الذي لديه نفس الحواف الثلاثة ذات الحدود المشتركة)

1D-8. أثبت أن $\boldsymbol{A.(B \times C) = (A \times B).C}$ ، وذلك باستخدام صيغة المحدد للضرب القياسي (النقطي) لثلاث متجهات، والقوانين الجبرية للمحددات الموجود في الملحق D للمحاضرة 02.

1D-9. أثبت أن مساحة المثلث الموجود على مستوي الإحداثيات x-y والتي لديها رؤوس عند (x_i, y_i)، من أجل $i = 1,2,3$ ، يمكن الحصول عليها من ناتج المحددة $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ، $\frac{1}{2}$ ، أوجد الحل بطريقتين مختلفتين:

a) عن طريق ربط مساحة المثلث بحجم متوازي سطوح معين.

b) باستخدام قوانين المحددات (راجع L.1 من الملحقات) اربط هذه المحددة إلى محددة "2x2" والتي يمكن أن تستخدم لحساب المساحة بشكل اعتيادي.

1E. معادلات الخطوط والمستويات الإحداثية

1E-1. أوجد معادلات المستويات الإحداثية الآتية:

a) يمر عبر النقطة $(2,0,-1)$ وعامودي على $+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

b) يمرعبر نقطة المبدأ، والنقطتين $(1,1,0)$ و $(2,-1,3)$.

c) يمرعبر النقاط $(1,0,1)$ و $(2,-1,2)$ و $(-1,3,2)$.

d) يمر عبر النقاط الموجود على المحاور x,y,z ، حيث $(x=a,\ y=b,\ z=c)$

"أعط الحل معبراً عنه بالصيغة $Ax+By+Cz=1$ وتذكر هذه الصيغة "

e) يمر بالنقطة $(1,0,1)$ و $(0,1,1)$ وموازٍ لـ $-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

1E-2. أوجد زاوية ثنائي السطح المحصورة بين المستويين $2x-y+z=3$ و $+y+2z=1$.

1E-3. اكتب بالصيغة الوسيطية معادلات الخطوط التالية:

a) خط يمر عبر النقطة $(1,0,-1)$ وموازي لـ $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

b) خط يمر عبر النقطة $(2,-1,-1)$ وعامودي على المستوي $x-y+2z=3$.

c) معادلة جميع الخطوط التي تمر بالنقطة $(1,1,1)$ وتقع على المستوي $+2y-z=2$.

1E-4. أين يمكن لخط يمر بالنقطين $(0,1,2)$ و $(2,0,3)$ أن يقطع المستوي $x+4y+z=4$ ؟؟

1E-5. الخط الذي يمر بالنقطة $(1,1,-1)$ والعامودي على المستوي $x+2y-z=3$ ، يقطع المستوي $2x-y+z=1$ عند أي نقطة ؟

1E-6. أثبت أن المسافة D من نقطة المبدأ إلى المستوي $ax+by+cz=d$ تعطى بالعلاقة $D=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(تلميح: لتكن n الوحدة العامودية بالنسبة للمستوي. وP نقطة على هذا المستوي؛ ابحث في مركبة OP في اتجاه n)

***1E-7.** صِغ طريقة عامة لإيجاد المسافة بين خطين منحرفين (مائلين) [لا يتقاطعا] في الفضاء، ومن ثم صِغها من أجل خطين غير متقاطعين يقعان على أقطار وجهين متجاورين من مكعب الوحدة "اختر مكان المكعب ليكون في الربع الأول من الاحداثيات الثلاثية الأبعاد، وأحد رؤوسه على نقطة المبدأ"

(تلميح: أقصر قطعة مستقيمة تصل بين الخطين المنحرفين ستكون عامودية على كليهما، (وإذا لم تكن فيجب أن يكون هناك قطعة مستقيمة أقصر منها))

1F. المصفوفة الجبرية

1F-1*. لتكن $= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، أوجد:

(a $B + C$, $B - C$, $2B - 3C$.

(b AB, AC, BA, CA, BC^T, CB^T.

(c $A(B + C)$ ؛$AB + AC$, $(B + C)A$, $BA + CA$.

1F-2*. لتكن A مصفوفة ما $m \times n$ ، ولتكن I_k مصفوفة حيادية بعدها k. برهن أن

($I_m A = A$) و ($AI_n = A$).

1F-3. أوجد كل مصفوفات "2x2" لِـ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، بحيث تكون $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1F-4*. أظهر كيف أن ضرب المصفوفة بشكل عام ليس له الخاصية التبادلية، وذلك عن طريق حساب المصفوفة $AB - BA$ لكل زوج من الأزواج التالية:

(a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1F-5.

(a لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، أوجد A^2, A^3, A^n.

(b افعل نفس الشي لِـ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1F-6*. لتكن A, A', B, B' جميعها مصفوفات "2x2" ، و O هي مصفوفة "2x2" وتساوي صفر. عبِّر مستخدماً المصفوفات الخمسة السابقة عن ناتج ضرب المصفوفات 4x4: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & O \\ O & B' \end{pmatrix}$.

***1F-7.** لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ، $=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. أثبت أنه لا توجد أي قيمة لِـ a وb تحقق هذه الصيغة الرياضية $AB-BA=I_2$.

.1F-8

a) إذا كانت $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ ، $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ ، $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، فما هي المصفوفة A 3x3 ؟

b)* إذا كانت $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ ، $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ ، $A\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$ ، فما هي المصفوفة A؟

1F-9. تربيع المصفوفة $n\times n$ يدعى بِـ المصفوفة **المتعامدة**، وذلك إذا $A.A^T=I_n$. أثبت أن هذا الشرط يكافئ القول بأن:

a) كل صف من المصفوفة A هو متجه صف طوله 1،

b) صفين مختلفين هما متجهات متعامدة.

***1F-10.** افترض أن A هي مصفوفة 2x2 متعامدة ، والتي عنصرها الأول هو $a_{11}=cos\,\theta$. أكمل المصفوفة A.
(هناك أربعة احتمالات، عد للتمرين 9)

***1F-11.** إذا كانت $(A+B)$ و (AB) معرّفتين ، أوجد:

a) $(A+B)^T=A^T+B^T$

b) $(AB)^T=B^TA^T$.

1G. حل النظم المربعة؛ معكوس المصفوفات

أوجد المعادلة $\boldsymbol{Ax = b}$ من خلال إيجاد $\boldsymbol{A^{-1}}$ لكل مما يلي:

1G-1*. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1G-2*.

(a $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ؛

(b $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1G-3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. أوجد $\boldsymbol{Ax = b}$ من خلال إيجاد $\boldsymbol{A^{-1}}$.

1G-4. بالاعتماد على التمرين 3 في الأعلى، أوجد الحل للنظام التالي:

$x_1 - x_2 + x_3 = y_1$ ، $x_2 + x_3 = y_2$ ، $-x_1 - x_2 + 2x_3 = y_3$
من أجل x_i كدالة لـِ (y_i).

1G-5. أُثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ باستخدام تعريف معكوس المصفوفة.

1G-6*. عمليات حسابية أخرى لمعكوس المصفوفة

إذا علمنا قيمة A^{-1} ، يمكننا إيجاد حل النظام $Ax = y$ من أجل x بكتابة $x = A^{-1}y$. ولكن على العكس من ذلك، إذا تمكنا من إيجاد الحل باستخدام طرق أخرى (مثلاً طريقة الإزالة) من أجل x معبراً عنها بِـ y، فنحصل على $x = By$ ؛ ومن ثم يكون لدينا $B = A^{-1}$ ومن ثم نستطيع إيجاد قيمة A^{-1}.

هذه الطريقة جيدة إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية- أي مصفوفة تحوي فقط أصفار فوق أو تحت القطر الرئيسي بالترتيب. لتوضيح ذلك:

a) لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ؛ أوجد A^{-1} عن طريق حل $\begin{aligned}-x_1+x_2+3x_3&=y_1\\ 2x_2-x_3&=y_2\\ x_3&=y_3\end{aligned}$

من أجل x_i بالنسبة لـِ (y_i) (ابدأ الحل من الأسفل صعوداً)

b) احسب A^{-1} بالطريقة المعطاة في الملحقات.

***1G-7.** اعتبر المصفوفة المدورة $A_\theta=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$ المتعلقة بدوران المحورين x و y بمقدار الزاوية θ.
احسب قيمة A_θ^{-1} بطريقة المصفوفة المرافقة، واشرح لماذا ظهر جوابك بالطريقة التي ظهر بها؟

***1G-8.**

a) أثبت أن A هي مصفوفة متعامدة (انظر التمرين 1F-9) فقط ، وفقط إذا كانت $A^{-1}=A^T$.

b) وضح مستخدماً المصفوفة من التمرين 7 السابق.

c) استخدم الجزء (a) لتبين أنه إذا كانت A و B هما مصفوفتان متعامدتان $n\times n$، فإن AB هي كذلك أيضاً.

***1G-9.**

a) لتكن A مصفوفة "3x3" حيث $|A|\neq 0$. الملحقات أوجدت المعكوس الأيمن A^{-1} ، أي أن $A.A^{-1}=I$. أثبت أن كل مصفوفة A لها أيضاً معكوس أيسر B (حيث أن $BA=I$) .

(تلميح: خذ بالاعتبار المعادلة $A^T.(A^T)^{-1}=I$؛ راجع التمرين 1F-11)

b) استنتج أن $B=A^{-1}$ معبراً عن ذلك بجملة واحدة. (هذا يبين أن المعكوس الأيمن A^{-1} هو نفسه المعكوس الأيسر أيضاً. لذلك إذا أردت التأكد أن أي مصفوتين هما معكوس بعضهما، عليك فقط القيام بضربهما- وتلقائياً سيكون الناتج على مساوياً I)

***1G-10.** لتكن A و B مصفوفتين "$n\times n$" . افترض أن $B=P^{-1}AP$ حيث P مصفوفة "$n\times n$" قابلة للعكس.
بين أن $B^n=P^{-1}A^nP$. وإذا كانت $B=I_n$ ، فما هي قيمة A ؟؟

***1G-11.** أعد حل التمرين **6a** و **6b** أعلاه، ولكن هذه المرة بحله بالنسبة للشكل العام لمصفوفة "**2x2**"

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ، بفرض أن $|A|\neq 0$.

1H. قاعدة كارمر "نظريات حول النظم المربعة"

1H-1. استخدم قاعدة كارمر لحل الآتي من أجل x:

(a) $\begin{matrix} 3x - y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x - y + z = -3 \end{matrix}$ ،

(b) $\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - z = 1 \\ -x + y + z = 2 \end{matrix}$.

1H-2. باستخدام قاعدة كارمر، أثبت بطريقة اخرى أنه إذا كانت A هي مصفوفة $n \times n$ محددتها لا تساوي صفر فإن المعادلات $Ax = 0$ لها فقط حل بسيط.

1H-3.

a) عند أي قيمة/قيم لـِ c ستكون $\begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + cx_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix}$ ذات حل غير بسيط؟

b) عند أي قيمة/قيم لـِ c ستكون $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ذات حل غير بسيط؟
(اكتب الحل كمجموعة متجانسة من المعادلات)

c) لكل قيمة لـِ c أوجدتها في (a)، أوجد حل غير بسيط للنظام الموافق. (استنتج المعادلات وذلك بإيجاد متجه عمودي على ثلاثة متجهات معطاة؛ أوجده باستخدام الضرب الاتجاهي.)

d)* لكل قيمة لـِ c أوجدتها في (b)، أوجد حل غير بسيط للنظام الموافق.

1H-4*. أوجد جميع الحلول للنظام المتجانس التالي: $\begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{matrix}$ ؛

استخدم الطريقة المقترحة في التمرين **3c** أعلاه.

1H-5. افترض أنه في النظام $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ لدينا $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$. بفرض أن $a_1 \neq 0$.

أظهر أن لهذا النظام حلول فقط، وفقط إذا كانت $c_2 = \frac{a_2}{a_1} c_1$.

***1H-6.** ليكن $|A| = 0$ ، و x_1 هي حل معين للنظام $x = B$. أظهر أن أي حل آخر x_2 لهذا النظام يمكن كتابته على النحو الآتي $x_2 = x_1 + x_0$ ، حيث أن x_0 هي حل النظام $Ax = 0$.

1H-7. بفرض أننا نريد أن نجد تذبذب صافي (حركة جيبية) للتردد 1 يمر عبر نقطتين معروفتين. بمعنىً آخر، نريد أن نحدد قيمة الثابتين a, b والتي تجعل المعادلة الرياضية:

$$f(x) = a\,cosx + b\,sinx$$

بحيث يكون لها قيم محددة عند قيمتين محددتين لـ x : $f(x_1) = y_1$ ، $f(x_2) = y_2$.

a) أظهر أن ذلك ممكن بطريقة واحدة فقط لاغير إذا افترضنا أن $x_2 \neq x_1 + n\pi$ ، حيث n هي عدد صحيح.

b) إذا كانت $x_2 = x_1 + n\pi$ صحيحة لعدد صحيح ما n ، متى يمكن إيجاد قيمة لِـ a, b.

***1H-8.** طريقة الكسور الجزئية، إذا تم القيام بها باستخدام معاملات مجهولة، ستؤدي إلى نظام من المعادلات الخطية.

ضع في الاعتبار أبسط حالة $\frac{ax+b}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{c}{x-r_1} + \frac{d}{x-r_2}$: (b,a معطى ؛ c,d يجب حسابهما)؛

ماهي المعادلات الخطية التي يمكنها إيجاد قيمة الثابتين c و d ؟؟ وما هي الظروف التي تجعل هذه المعادلات الخطية تعطي حلاً فريداً؟ (حاول أن تحل هذه المسألة بالنسبة لثلاثة جذور r_i ، حيث $i = 1,2,3$. احسب المحددة باستخدام عمليات العمود وذلك للحصول على أصفار في الصف العلوي.)

1I. دالات المتجه والمعادلات الحدودية

1I-1. النقطة $\boldsymbol{P}$ تتحرك بسرعة ثابتة v باتجاه المتجه الثابت $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$. عند الزمن $\mathrm{t}=0$ أصبحت النقطة عند (x_0,y_0)، أوجد دالة متجه الموقع لهذه النقطة $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})$ ؟؟

1I-2. نقطة تتحرك مع اتجاه عقارب الساعة بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ على دائرة ذات نصف قطرها $\boldsymbol{a}$ ومركزها نقطة المبدأ. ما هي دالة متجه الموقع $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})$ ، إذا كانت النقطة في الزمن $\mathrm{t}=0$ عند:

(a $(a,0)$ **(b** $(0,a)$

1I-3. صِف التحركات المعطاة بدوال متجه الموقع التالية، بحيث $\boldsymbol{t}$ تسعى من $-\infty$ إلى ∞ . في كل حالة، أعط معادلة xy للمنحنى الذي تنتقل عليه النقطة P ، حدد جزء المنحنى الذي تتبعه النقطة P بدقة .

(a $r=2cos^2t\,\boldsymbol{i}+sin^2t\,\boldsymbol{j}$

(b $r=cos2t\,\boldsymbol{i}+\cos t\;\boldsymbol{j}$

(c $r=(t^2+1)\boldsymbol{i}+\;t^3\,\boldsymbol{j}$

(d $r=\tan t\;\boldsymbol{i}+\sec t\,\boldsymbol{j}$

1I-4. لفافة مثبتة من البلاستيك قطرها الخارجي a ، تم سحب الشريط اللاصق الموجود عليها باتجاه عكس عقارب الساعة. النهاية P من الشريط ممسوكةٌ بحيث يكون الجزء المسحوب عمودي دائماً على اللفافة. إذا اعتبرنا أن مركز اللفافة هو نقطة المبدأ O ، والنهاية P مبدئياً عند النقطة $(a,0)$ ، اكتب المعادلات الوسيطية لحركة النقطة P .
(استخدم المتجهات؛ عبّر عن متجه الموقع OP كدالة متجه بمتغير واحد)

1I-5. يتم لف حبل باتجاه عقارب الساعة حول دائرة ذات قطر a ومركزها نقطة المبدأ O؛ الموقع المبدئي للنهاية P للحبل هو $(a,0)$. الجزء الباقي من الحبل مشدود نحو الأسفل (بحيث يكون مماساً للدائرة). اكتب المعادلة الوسيطية لحركة النقطة P . (استخدم المتجهات؛ عبّر عن متجه الموقع OP كدالة متجه بمتغير واحد)

1I-6. صياد بقوس وسهم يمشي باتجاه نقطة المبدأ على محور $\mathbf{x}$ الموجب، بسرعة وحدة؛ عند الزمن 0 أصبح عند $\mathrm{x}=10$. سهمه (طوله وحدة) موجه دائماً باتجاه أرنب يتنقل بسرعة $\sqrt{\mathbf{5}}$ في الربع الأول على طول المستقيم $\mathrm{y}=2\mathrm{x}$؛ عند الزمن 0 كان الأرنب عند نقطة المبدأ:

(a اكتب دالة المتجه $A(t)$ للسهم عند الزمن t.

b) في أقرب نقطة من الأرنب أطلق الصياد سهمه (لكنه لم يصبه!)؛ أوجد متى حدث ذلك؟

1I-7. الدويري هو منحنى يتشكل من نقطة ثابتة P على دائرة ذات نصف قطر a والتي تدور على طول المحور x بالاتجاه الموجب، ابتداءً من حيث كانت النقطة P عند نقطة المبدأ O . أوجد دالة المتجه OP؛ استخدم الزاوية التي تدور بها الدائرة كمتغير.

(تلميح: ابدأ بالتعبير عن OP كمجموع ثلاث دوال متجه بسيطة)

1J. اشـتـقـاق دوال المـتـجـه

1J-1. 1. لكل من دوال المتجه المتعلقة بالزمن التالية، احسب السرعة المتجهة، والسرعة |ds/dt|، ومتجه مماس الوحدة (باتجاه السرعة المتجهة) ، والعجلة (التسارع):

(a $e^t\,\boldsymbol{i} + e^{-t}\,\boldsymbol{j}$

(b $t^2\,\boldsymbol{i} + t^3\,\boldsymbol{j}$

(c $(1-2t^2)\,\boldsymbol{i} + t^2\,\boldsymbol{j} + (-2+2t^2)\boldsymbol{k}$

1J-2. لتكن $OP = \frac{1}{1+t^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{t}{1+t^2}\,\boldsymbol{j}$ هي متجه موقع لحركة ما:

a) احسب **v** ، |ds/dt|، و T.

b) عند أي نقطة تكون السرعة عظمى؟ صغرى؟

c) أوجد معادلة xy للمنحنى الذي تتحرك عليه النقطة P ، وصِف هذه الحركة هندسياً.

1J-3. أثبت صحة قانون اشتقاق الضرب القياسي (النقطي) لدالتي متجه على مستوي الإحداثيات:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}r.s = \frac{dr}{dt}.s + r.\frac{ds}{dt}$$

وذلك بحساب المركبات، وجعل $\mathbf{r} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{s} = x_2\,\boldsymbol{i} + y_2\,\boldsymbol{j}$.

1J-4. لنفرض أن النقطة $\boldsymbol{P}$ تتحرك على سطح جسيم كروي والذي مركزه نقطة المبدأ؛ ولتكن:

$$OP = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

أظهر أن متجه السرعة المتجهة v عمودي دوماً على $\boldsymbol{r}$ ، بطريقتين مختلفتين:

a) باستخدام المحاور الإحداثية x, y, z .

b) بدون الاعتماد على الإحداثيات (استخدم الصيغة الرياضية من التمرين **1J-3**، حيث يمكن تطبيقها في الفضاء أيضاً).

c) برهن العكس: أنه إذا كانت r و v عموديتان على بعضهما، فإن حركة النقطة $\boldsymbol{P}$ تكون على سطح جسيم كروي.

1J-5.

a) بفرض أن نقطة تتحرك بسرعة ثابتة. أثبت أن متجه سرعتها المتجهة وعجلتها المتجهة هما عموديان على بعضهما. (استخدم الصيغة الرياضية من التمرين **1J-3**)

b) أظهر العكس: أنه إذا كانت متجهات السرعة المتجهة والعجلة متعامدين، إذاً النقطة $\boldsymbol{P}$ تتحرك بسرعة ثابتة.

1J-6. من أجل الحركة اللولبية $(\mathrm{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k})$:

a) احسب v، a، T، |ds/dt|.

b) أثبت أن v و a عموديان على بعضهما؛ اشرح باستخدام التمرين **1J-5**.

1J-7.

a) بفرض أنه لديك دالة متجه $\boldsymbol{r}(t)$ قابلة للاشتقاق. كيف يمكنك استنتاج أن الوسيط t هو طول القوس s (حُسِب من نقطة ما باتجاه t المتزايد) بدون الحاجة إلى حساب s صراحةً؟؟

b) كيف يجب أن يتم اختيار a ، بحيث تكون t هي طول القوس إذا كانت $\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + at)\boldsymbol{i} + (y_0 + at)\boldsymbol{j}$؟

c) كيف يجب اختيار a و b، بحيث تكون t هي طول القوس في الحركة اللولبية التي تم مناقشتها في التمرين **1J-6**.

1J-8.

a) أثبت صحة الصيغة التالية: $\frac{d}{dt}u(t)r(t) = \frac{du}{dt}r(t) + u(t)\frac{dr}{dt}$.

(من الأفضل افتراض أن هذه المتجهات تقع على المستوي؛ وبالتالي احسب باستخدام المركبات)

b) لتكن $\boldsymbol{r}(t) = e^t\cos t\,\boldsymbol{i} + e^t\sin t\,\boldsymbol{j}$ هي حركة حلزونية أسية. استخدم الجزء (a) لإيجاد سرعة هذه الحركة.

1J-9. نقطة $\boldsymbol{P}$ تتحرك في الفضاء، بمتجه الموقع: $\boldsymbol{r} = OP = 3\cos t\,\boldsymbol{i} + 5\sin t\,\boldsymbol{j} + 4\cos t\,\boldsymbol{k}$

a) أثبت أنها تتحرك على سطح جسيم كروي.

b) أثبت أن سرعتها ثابتة.

c) أثبت أن العجلة تتجه نحو نقطة المبدأ.

d) أثبت أنها تحرك على مستوي قاطعةً نقطة المبدأ.

e) صِف المسار الذي تتبعه النقطة $\boldsymbol{P}$.

1J-10. التقوس الموجب κ لدالة متجه $\boldsymbol{r}(t)$ يعرّف بالصيغة $\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right|$.

a) أثبت أن الحلزونية في التمرين **1J-6** لها تقوس ثابت.

(ليس من الضرورة حساب $\boldsymbol{s}$ صراحةً؛ احسب dT/dt بدلاً من ذلك واربطها مع κ باستخدام قاعدة السلسلة)

b) ما هو هذا التقوس إذا تم تقليص الحلزون ليصبح دائرة في المستوي **xy**.

1K. قانون كِبلر الثاني

1K-1. أثبت القاعدة رقم (1) في الملحق **K** للمحاضرة 06 المتعلقة باشتقاق الضرب النقطي (القياسي) لِمتجهي مستوي: قم بالحسابات مستخدماً نظام المحاور $\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}$.

(لتكن $\boldsymbol{r}(t) = x_1(t)\,\boldsymbol{i} + y_1(t)\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{s}(t) = x_2(t)\,\boldsymbol{i} + y_2(t)\,\boldsymbol{j}$)

1K-2. لتكن $\boldsymbol{s}(t)$ هي دالة متجه. أثبت باستخدام المركبات أن: $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{0}$ ،

حيث $\boldsymbol{K}$ متجه ثابت.

1K-3. في الملحق **K** للمحاضرة 06، ومن خلال عكس الخطوات (5)- (8) ، أثبت العبارة في آخر فقرة. (ستحتاج إلى العبارة في التمرين **1K-2**)

1A. المتجهات

.1A-1

(a $|\mathbf{A}| = \sqrt{3}$ ، $\text{dir}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/\sqrt{3}$

(b $|\mathbf{A}| = 3$ ، $\text{dir}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/3$

(c $|\mathbf{A}| = 7$ ، $\text{dir}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/7$

.1A-2 (a $1/25 + 1/25 + c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{23}/5$

.1A-3

(a $\mathbf{A} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $|\mathbf{A}| = 3$ ، $\text{dir}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/3$.

(b $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\text{dir}\,\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ، ولتكن P هي الذيل و Q هي الرأس. إذاً، $OQ = OP + \mathbf{A} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. وهكذا، فإن $Q = (0,4,-3)$.

.1A-4

(a $OX = OP + PX = OP + \frac{1}{2}(PQ) = OP + \frac{1}{2}(OQ - OP) = \frac{1}{2}(OP + OQ)$

(b $OX = s\,OP + r\,OQ$؛ استبدل $\frac{1}{2}$ بـ r من الصيغة أعلاه؛ واستخدم العلاقة $r = s$ $1 -$.

.1A-5

$\mathbf{A} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$. الشرط مهم وليس زائداً عن الحاجة، حيث أنه يوجد متجهين (شعاعين) لهما الطول 3 ويكوّنان زاوية مقدارها $30°$ مع المتجه ***i***.

.1A-6

الرياح $\mathbf{w} = 50(-\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ ، $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 200\,\mathbf{j} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{v} = \frac{50}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \left(200 + \frac{50}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$.

.1A-7

(a $b\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}$

(b $-b\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}$

(c $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$؛ $\mathbf{j}' = -(4/5)\mathbf{i} + (3/5)\mathbf{j}$.

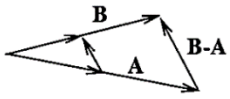
.1A-8

a) إنها من النسب المثلثية الأساسية؛

b) $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$، إلخ...؛ $\mathbf{dir}\,\mathbf{A} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

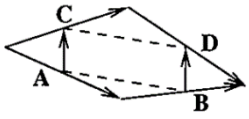
c) إذا كانت t, u, v هي اتجاه جيب تمام الزاوية لبعض قيم $\mathbf{A}$، فإن $t\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k} = \mathbf{dir}\,\mathbf{A}$، متجه وحدة، لذا $t^2 + u^2 + v^2 = 1$. وبالعكس، إذا تحققت هذه المعادلة فإن $t\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k} = \mathbf{u}$ تمثل متجه وحدة، لذا $(\mathbf{dir}\,\mathbf{u} = \mathbf{u})$ ، و t, u, v هي اتجاه جيب تمام الزاوية لِـ $\mathbf{u}$.

.1A-9



بجعل $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ يمثلان الضلعين، فإن الضلع الثالث هو $\mathbf{B} - \mathbf{A}$؛ فإن المستقيم الذي يصل بين النقطتين المنصِّفتين هو $\frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$، أو $\frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A})$. وهكذا، فإن هذا المستقيم هو متجه موازٍ للضلع الثالث وطوله يساوي نصف طول هذا الضلع.

.1A-10



بجعل $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ هي الأضلاع الأربعة؛ فإنه إذا كانت المتجهات موجهة بشكلٍ مناسب، فسيكون لدينا $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$.

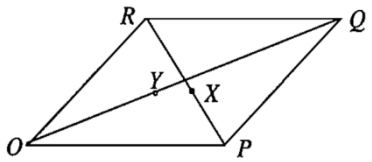
وبالتالي المتجه من نقطة منتصف $\mathbf{A}$ إلى نقطة منتصف $\mathbf{C}$ هو $\frac{1}{2}\mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$؛ وبشكلٍ مشابه، المتجه الواصل بين منتصف الضلعين الآخرين هو $\frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{D}$ ، وأيضاً:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} - \mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{B} - \mathbf{D})$$

وهكذا، فإنه يوجد ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين، وهذا يعني أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع.

.1A-11

بجعل O, P, Q, R هي الرؤوس الأربعة، حيث تكون النقطة X على PR والنقطة Y على OQ،



$$OX = OP + PX = OP + \frac{1}{2}PR$$
$$= OP + \frac{1}{2}(OR - OP)$$
$$= \frac{1}{2}(OR + OP) = \frac{1}{2}OQ = OY\ ;$$

ولذلك فإن $X = Y$.

1B. الضرب النقطي (القياسي)

1B-1.

a) $\cos\theta = \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{4+2}{\sqrt{2}.6} = \frac{1}{\sqrt{2}}$، $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$، $\theta = \frac{\pi}{3}$.

1B-2.

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = c - 4$، لذلك:

a) تكون عمودية إذا كانت $c = 4$.

b) $\cos\theta = \frac{c-4}{\sqrt{c^2+5}\sqrt{6}}$؛ الزاوية θ هي زاوية حادة إذا كانت $\cos\theta > 0$، بمعنىً آخر ، $c = 4$.

1B-3.

ضع المكعب في الربع الأول بحيث تكون نقطة المبدأ تقع على زاوية واحدة فقط ولتكن P، و $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ تشكل ثلاثة حواف. القطر الأطول $PQ = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$؛ والقطر السطحي $PR = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

a) $\cos\theta = \frac{\mathrm{PQ.PR}}{|\mathrm{PQ}|.|\mathrm{PR}|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$ ؛ $\theta = \cos^{-1}\sqrt{2/3}$.

b) $\cos\theta = \frac{\mathrm{PQ}.\mathbf{i}}{|\mathrm{PQ}|.|\mathbf{i}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$، $\theta = \cos^{-1}1/\sqrt{3}$.

1B-4.

$QP = (a, 0, -2)$، $QR = (a, -2, 2)$، ولذلك:

a) $QP.QR = a^2 - 4$، وبالتالي فإن PQR هي زاوية قائمة إذا كانت $a^2 - 4 = 0$، بمعنىً آخر، إذا $a = \pm 2$.

b) $\cos\theta = \frac{a^2-4}{\sqrt{a^2+4}\sqrt{a^2+8}}$؛ الزاوية حادة إذا كانت $\cos\theta > 0$، بمعنىً آخر ، $a^2 - 4 = 0$، أو $|a| > 2$، أي، $(a > 2)$ أو $(a < 2)$.

1B-5.

a) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = -1/\sqrt{3}$ b) $\mathbf{u} = \mathrm{dir}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}/7$، إذاً $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = -4/7$.

.1B-6

بعد القسمة على $|OP|$، فإن المعادلة تقول أن $\cos\theta = c$، حيث θهي الزاوية بين OP و$\mathbf{u}$ ؛ وحلها يكون $\theta_0 = \cos^{-1}c$. وبالتالي، فإن الموضع الهندسي هو غطاء لمخروط دائري قائم له محور بالاتجاه $\mathbf{u}$ وزاوية رأسية هي $2\theta_0$. وعلى وجه الخصوص، هذا المخروط هو:

a) مستوي إذا كانت $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$، أي، إذا كانت $c = 0$.

b) شعاع إذا كانت $\theta_0 = 0, \pi$، أي، $c = \pm 1$. c) غير موجود إذا كانت θ_0 غير موجودة، أي،عندما تكون $c > 1$ أو $c < -1$.

.1B-7

a) $|\mathbf{i}'| = |\mathbf{j}'| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$؛ هنالك صورة تبين أن النظام على الطرف الأيمن.

b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = -1/\sqrt{2}$ ؛ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = -5/\sqrt{2}$؛

وبما أنهما متجها وحدة متعامدين، $\mathbf{A} = \frac{-\mathbf{i}'-5\mathbf{j}'}{\sqrt{2}}$.

c) بالحل فإن $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}'-\mathbf{j}'}{\sqrt{2}}$ و $\mathbf{j} = \frac{\mathbf{i}'+\mathbf{j}'}{\sqrt{2}}$؛

وهكذا فإن $\frac{-\mathbf{i}'-5\mathbf{j}'}{\sqrt{2}} = \frac{2(\mathbf{i}'-\mathbf{j}')}{\sqrt{2}} - \frac{3(\mathbf{i}'+\mathbf{j}')}{\sqrt{2}}$، $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$، كما رأينا سابقاً.

.1B-8

a) تحقق من أن كل منهما له الطول 1، ونواتج الضرب النقطي الثلاثة $\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}'$ ، $\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k}'$، $\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k}'$ تساوي صفر؛ قم بالرسم للتحقق من وقوعها على الطرف الأيمن.

b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = \sqrt{3}$ ، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = 0$ ، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}' = \sqrt{6}$، ولذلك فإن $\mathbf{A} = \sqrt{3}\mathbf{i}' + \sqrt{6}\mathbf{k}'$.

.1B-9 لتكن $\mathbf{u} = \text{dir}\,\mathbf{A}$، بالتالي متجه المركبة $\mathbf{u}$ لِـ $\mathbf{B}$ هو $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$. وبطرحها نحصل على متجه متعامد على $\mathbf{u}$ (وبالتالي عمودية على $\mathbf{A}$ أيضاً)؛ وهكذا، فإن:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u})$$

أو بالتعبير عن الصيغة السابقة باستخدام $\mathbf{A}$: (تذكر أن $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\boldsymbol{A} + \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\boldsymbol{A}\right)$$

1B-10. لتكن حافتين متجاورتين من متوازي الأضلاع هما المتجهات $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$؛ فيكون القطرين هما $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $-\mathbf{B}$. وتذكر أنه بالنسبة لأي متجه $\mathbf{C}$ يكون لدينا $\mathbf{C}.\mathbf{C}=|\mathbf{C}|^2$ ، وأن القطرين لهما نفس الطول:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &\Leftrightarrow\\ (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})+2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})-2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) &\Leftrightarrow\\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{0} &\Leftrightarrow\end{aligned}$$

وهذا يدل على أن الضلعين متعامدين، وبالتالي متوازي الأضلاع هذا هو مستطيل.

1B-11.

باستخدام الترميز في التمرين السابق، لدينا تباعاً:

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$؛ ولذلك،

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

أي أن الأقطار متعامدة على بعضها إذا وفقط إذا كان هنالك حافتين متجاورتين لهما نفس الطول. بمعنىً آخر، إذا كان متوازي الأضلاع على شكل معين.

1B-12. لتكن النقطة O هي مركز لنصف دائرة، النقطتين Q و R هما نهايتي القطر، و P رأس الزاوية المحيطية؛ اجعل $\mathbf{A}=QO=OR$ و $\mathbf{B}=\mathrm{OP}$؛ ومنه فإن $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\\ &= 0\end{aligned}$$

حيث $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$.

1B-13.

متجهات الوحدة هي $u_i=\cos\theta_i\,\mathrm{i}+\sin\theta_i\,\mathrm{j}$ ، من أجل $i=1,2$؛ الزاوية بينهم $\theta_2-\theta_1$. ثم نحصل من التعريف الهندسي للضرب النقطي (القياسي) على:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_2-\theta_1) &= \frac{\mathrm{u}_1.\mathrm{u}_2}{|\mathrm{u}_1||\mathrm{u}_2|},\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2,\end{aligned}$$

وذلك بالاستناد إلى الصيغة التي يتم عن طريقها حساب الضرب النقطي (القياسي) باستخدام المركبات.

1B-14. لتكن المتجهات $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ذوي الحدود المشتركة يمثلان ضلعين من مثلث، ولتكن θ هي الزاوية بينهما. وبتوجيهه بشكلٍ صحيح، فإن الضلع الثالث هو $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$، وأيضاً:

$$|\mathbf{C}|^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$
$$= |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$$

وهذا بالاعتماد على التفسير الهندسي للضرب النقطي (القياسي).

1C. المحددات

1C-1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10$.

1C-2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 8 - (24 + 4 + 0) = -34$$

a) باستخدام المعاملات المساعدة للصف الأول:

$$= -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -34$$

b) باستخدام المعاملات المساعدة للعمود الأول:

$$= -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -34$$

1C-3.

a) $= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$، إذاً مساحة متوازي الأضلاع هي 3، ومساحة المثلث هي 3/2.

b) الأضلاع هي $PQ = (0, -3)$، $PR = (1,1)$، $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$، بالتالي فإن مساحة متوازي الأضلاع هي 3، ومساحة المثلث هي 3/2 .

1C-4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = x_2x_3^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_1^2x_2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_3x_2 + x_1x_3^2 - x_2^2x_1 + x_2x_1x_3 + x_2^2x_3 - x_2x_3^2$$

حدين تم إلغاؤهما، أما الستة حدود الباقية فإنها على نفس طريقة ما كتب أعلاه، ولكن لها إشارة مخالفة.

.1C-5

a) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 + ax_1 & y_2 + ay_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + ax_1y_1 - x_2y_1 - ay_1x_1$.

b) مشابه.

.1C-6

عن طريق مفكوك لابلاس باستخدام المعاملات المرافقة للصف الأول.

.1C-7

رؤوس المتجهين تقع على دائرة وحدة. مساحة متوازي الأضلاع التي يشكلانها تكون أكبر ما يمكن عندما يكونان عموديين على بعضهما، وبما أن المساحة $= ab \sin\theta = 1.1. \sin\theta$ ، و $\sin\theta$ أكبر ما يمكن عندما تكون $\theta = \pi/2$.

لذلك أكبر قيمة للمحدد $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ تساوي مساحة مربع وحدة وتساوي 1 .

.1C-9

$PQ = (0 - 1,2)$، $PR = (0,1,-1)$، $PS = (1,2,1)$؛

حجم متوازي الأسطح $= \pm \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm(-1) = 1$.

حجم رباعي الأسطح $= \frac{1}{3}$ (القاعدة)(الارتفاع)$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$(القاعدة متوازي الأسطح)(الارتفاع)

$= \frac{1}{6}$(حجم متوازي الأسطح)$= \frac{1}{6}$.

.1C-10

باعتبار جميع هذه المتجهات كمتجهات نقطة المبدأ، حيث **A** تقع في مستوي **B** و **C**. فلذلك يكون حجم متوازي الأسطح المحصور بالمتجهات الثلاثة هذه يساوي صفر.

1D. الضرب الاتجاهي

1D-1.

(a $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - (-3)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(b $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

1D-2.

(a $PQ = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $PR = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، لذا

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ؛ ومساحة المثلث: $\frac{1}{2}|PQ \times PR| = \frac{1}{2}\sqrt{42}$.

1D-3.

نحصل على المتجه الثالث (الموجه بشكل صحيح) العمودي على $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باستخدام $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

اجعل القيم السابقة متجهات وحدة: $\mathbf{i}' = \mathbf{A}/\sqrt{5}$، $\mathbf{j}' = \mathbf{B}/\sqrt{6}$، $\mathbf{k}' = (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})/\sqrt{30}$.

1D-4.

$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$؛ $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

1D-5. لكلا السؤالين استخدم $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta$، حيث θ هي الزاوية بين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$.

(a $\sin\theta = 1 \Leftarrow \theta = \pi/2$؛ إذاً المتجهين متعامدين.

(b $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$، وبالتالي $\tan\theta = 1$، ومنه $\theta = \pi/4$ (الزاوية بين المتجهين)

.1D-6

خذ المكعب بحيث تكون P على نقطة المبدأ، فإن الحواف المتجاورة تكون $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$. وبالتالي الأقطار الثلاثة للوجوه هي $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ، $\mathbf{i}+\mathbf{k}$. وبالاستناد إلى ذلك، فإن حجم متوازي الأسطح المحصور بهذه الأقطار $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

.1D-7

لدينا $PQ = (-2,1,1)$، $PR = (-1,0,1)$ $PS = (2,1,-2)$؛ وبالتالي فإن حجم متوازي الأسطح $= \pm \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (\pm 1) = 1$ ، وحجم رباعي الأسطح $= \frac{1}{6}$.

.1D-8

أحد المحددين يحتوي على الأسطر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ بالترتيب، والآخر يمثل $\mathbf{C}.(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$، ولذلك فإن أسطره هي $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ على الترتيب.

لتغيير المحدد الأول إلى الثاني، بدِّل بين السطر الثاني والثالث، ومن ثم السطر الأول بالثاني؛ كل تبديلٍ يُجرى يَضرب المحدد بـِ (1-)،استناداً إلى **D-1** (انظر الملاحظات **D**)، لذلك محصلة التأثير الناتج من التبديلين المتتاليين هي ترك القيمة دون تغيير؛ وهكذا $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

.1D-9

a) ارفع المثلث إلى الأعلى في المستوي $z = 1$، بحيث تصبح رؤوسه على النقاط الثلاثة $P_i = (x_i, y_i, 1)$ ، $i = 1,2,3$.

حجم رباعي الأسطح $OP_1P_2P_3$ =$\frac{1}{3}$(القاعدة)(الارتفاع)= $\frac{1}{3}$ ·1(مساحة المثلث)؛

حجم رباعي الأسطح $OP_1P_2P_3$ =$\frac{1}{6}$(حجم متوازي الأسطح المحصور بـِ OP_i)

$= \frac{1}{6}$(المحدد)

ولذلك، فإن: مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$(المحدد)

b) طرح السطر الأول من الثاني، والسطر الأول من الثالث لا يغير من قيمة المحدد، بالاستناد إلى **D-4**، ولكنه يعطي التالي:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

عن طريق مفكوك لابلاس باستخدام المعاملات المساعدة للعمود الأخير؛ ولكن هذا المحدد 2×2 يعطي مساحة متوازي الأضلاع المحصور بالمتجهات التي تمثل ضلعين من مثلث المستوي، والمثلث يساوي نصف هذه المساحة.

1E. المستقيمات والمستويات

1E-1.

a) $x+2y-2z=4 \Leftarrow (x-2)+2y-2(z+1)=0$.

b) $\mathrm{N}=(1,1,0)\times(2,-1,3)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ، وبإزالة العامل المشترك 3، فإن المعادلة تصبح $-y-z=0$.

c) بتسمية النقاط الثلاثةP،Q،R على الترتيب، يصبح لدينا $PQ=(1,-1,1)$،$PR=(-2,3,1)$؛

$$N=PQ\times PR=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

المعادلة (عبر النقطة $P(1,0,1)$): $-4(x-1)-3y+(z-1)=0$، أو $-4x-3y+z=-3$

d) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

e) N يجب أن تكون عمودية على كلٍ من $\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $PQ=(1,-1,0)$. لذلك:

$N=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$؛ والمستوي الذي يمر عبر $(1,0,1)$ من أجل N هذه يكون:

$x+y=1$.

.1E-2

الزاوية لثنائية الأسطح بين المستويين هي نفسها الزاوية θ بين متجهيهما المتعامدين. المتجهين المتعامدين هما $(2,-1,1)$ و $(1,1,2)$ على الترتيب، لذلك فإن $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$، وبالتالي: $\theta = 60°\ ,\ {}^{\pi}/_{3}$.

.1E-3

a) $x = 1 + 2t$ ، $y = -t$، $= -1 + 3t$.

b) $x = 2 + t$ ، $y = -1 - t$، $z = -1 + 2t$ ، حيث أن المستقيم له نفس اتجاه المتجه المتعامد على المستوي.

c) متجه الاتجاه للمستقيم يجب أن يكون موازياً للمستوي، أي عمودياً على المتجه المتعامد $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$؛ وبالتالي فإن الجواب يصبح:

$x = 1 + at$، $y = 1 + bt$، $z = 1 + ct$، حيث $a + 2b - c = 0$. أو بطريقة أفضل، $x = 1 + at$، $y = 1 + bt$، $z = 1 + (a + 2b)t$ وهذا لأي قيمة a ، b.

.1E-4

المستقيم له متجه اتجاه $PQ = (2,-1,1)$، فتكون معادلاته الوسيطة هي:

$$x = 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2 + t\ .$$

ثم عوِّض بها في معادلة المستوي، وذلك لإيجاد نقطة تقع على كلٍ من المستقيم والمستوي:

$$2t + 4(1 - t) + (2 + t) = 4 \quad \text{(أو)} \quad -t + 6 = 4\ ;$$

وهكذا، فإن $t = 2$ والنقطة (بعد التعويض في المعادلات الوسيطة) هي: $(4,-1,4)$.

.1E-5

المستقيم له اتجاه المتجه المتعامد على المستوي، وبالتالي فإن معادلاته الوسيطة هي:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -1 - t$$

وبعد التعويض نجد أنه يتقاطع مع المستوي عند :

$2(1+t)-(1+2t)+(-1-t)=1$ (أو) $-t=1$ ؛ أي عند النقطة $(0,1,0)$.

.1E-6

لتكن النقطة $P_i:(x_0,y_0,z_0)$ تقع على المستوي، و $N=(a,b,c)$ هو المتجه المتعامد مع المستوي. المسافة التي نريدها هي طول متجه نقطة المبدأ العمودي على المستوي؛ وهو نفسه مركبة OP_0 في اتجاه N . وهكذا، فإننا نحصل على: (اختر الإشارة التي تجعل المسافة موجبة)

"المسافة من النقطة إلى المستوي":

$$=\pm OP_0\cdot\frac{N}{|N|}=\pm(x_0,y_0,z_0)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

معادلة المساواة الأخيرة صحيحة طالما أن النقطة تحقق معادلة المستوي.

1F. جبر المصفوفة

1F-3

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$$ ،

نريد جميع العناصر الأربعة لعملية الضرب هذه أن تكون صفراً؛ وهذا يعطي المعادلات التالية:

$$a^2 = -bc, \quad b(a+d) = 0, \quad c(a+d) = 0, \quad d^2 = -bc$$

الحالة 1: $a+d \neq 0$، ومنه فإن $b=0$ و $c=0$؛ وبالتالي $a=0$ و $d=0$.

الحالة 2: $a+d=0$، ومنه فإن $d=-a$ ، $bc=-a^2$.

الجواب: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$، حيث $bc=-a^2$، أي: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = 0$.

1F-5

(a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$؛ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ؛ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$.

(b $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$؛ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

خمِّن: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ برهان ذلك بالاستقراء (بالاستنباط):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1F-8

(a $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$؛ إلخ.....

الجواب: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

.1F-9

بالنسبة لمدخلات ضرب المصفوفة $A \cdot A^T = C$، فإنه لدينا:

$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \to i \neq j \\ 1 & \to i = j \end{cases}$ ، حيث أن $A \cdot A^T = I$.

من ناحية أخرى، بالاستناد إلى مفهوم ضرب المصفوفة:

c_{ij} = (الصف i من المصفوفة A).(العمود j من المصفوفة A^T)

= (الصف i من المصفوفة A).(الصف j من المصفوفة A).

حيث أن الأطراف اليمنى في كل تعبير لِـ c_{ij} يجب أن تكون متساوية. وعندما تكون $j = i$ فإنه يظهر أن الصف i له طولٌ يساوي 1؛ بينما عند $j \neq i$ فإن الصفوف المختلفة تكون متعامدةً على بعضها.

1G. حل الأنظمة المربعة؛ معكوس المصفوفات

1G-3.

$$M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&3&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}،\quad M^T=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}،\quad A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}،$$

حيث أن M هي مصفوفة المعاملات المساعدة (انظر الإشارات)، M^T هي بديلتها (المصفوفة المرافقة)، ولقد حسبنا أن $\det A=5$، لنحصل على A^{-1}. وهكذا، فإن:

$$\mathbf{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

1G-4.

النظام هو $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$، فيكون الحل $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{y}$، أو

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}؛$$

وبكتابة نظام المعادلات فإننا نحصل على:

$$x_1=\frac{3}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2-\frac{2}{5}y_3\text{ ، }x_2=-\frac{1}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2-\frac{1}{5}y_3\text{ ، }x_3=\frac{1}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2+\frac{1}{5}y_3.$$

1G-5.

باستخدام قانون التجميع، ومفهوم المعكوس، وقانون المحايدة،

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

وبشكلٍ مشابه، $(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$، لذلك $B^{-1}A^{-1}$ هي معكوس AB.

1H. قاعدة كارمر؛ نظريات حول الأنظمة المربعة

1H-1.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$؛ $x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

1H-2.

باستخدام قاعدة كارمر، المحددات في البسوط بالنسبة لِـ x و y و z جميعها يحتوي على عمود من الأصفار، لذلك هي ذات قيمة تساوي صفر، بالاستناد إلى قانون المحدد **D-2** .

1H-3.

a) الشرط الواجب ليصبح حلها غير صفر هو: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & c & 2 \end{vmatrix} = 0$؛ وباستخدام التفكيك يصبح لدينا:
$0 = (-1 + c - 4) + 2 + 2c + 1$، بمعنىً آخر $c = -8$.

b) $\begin{cases} (2-c)x + y = 0 \\ (-1-c)y = 0 \end{cases}$ لها حل غير بديهي إذا كانت $\begin{vmatrix} 2-c & 1 \\ 0 & -1-c \end{vmatrix} = 0$،
أي، إذا كانت $(2-c)(-1-c) = 0$، بمعنىً آخر، $c = 2$ أو $c = -1$.

c) خذ $c = -8$. والمعادلات تقول أننا بحاجة لإيجاد متجه (x_1, x_2, x_3) عمودي على المتجهات الثلاثة هذه: $(1, -1, 2)$ ، $(2, 1, 1)$ ، $(-1, -8, 2)$.

المتجه العمودي على أول متجهين يساوي: $(1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = (-2, 1, 3)$ (بالحساب). وهذا المتجه هو عمودي أيضاً على $(-1, -8, 2)$: $(-2, 1, 3) \cdot (-1, -8, 2) = 0$.

.1H-5

إذا كانت (x_0, y_0) هي حل، فإن: $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$.

وبالتخلص من x_0 فإننا نحصل على: $(a_2b_1 - a_1b_2)y_0 = a_2c_1 - a_1c_2$.

الطرف الأيسر يساوي صفر كما تنص الفرضية، لذا الطرف الأيمن أيضاً يساوي صفر:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

وبالعكس، إذا كان له قيمة، فإن الحل هو: $x_0 = \frac{c_1}{a_1}$ ، $y_0 = 0$ (أو $x_0 = \frac{c_2}{a_2}$، إذا كانت $a_1 = 0$).

.1H-7

a) $\begin{cases} a\cos x_1 + b\sin x_1 = y_1 \\ a\cos x_2 + b\sin x_2 = y_2 \end{cases}$ لها حل وحيد إذا كانت: $\begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ،

بمعنىً آخر، إذا كانت $\cos x_1 \sin x_2 - \cos x_2 \sin x_1 \neq 0$، أي $\sin(x_2 - x_1) \neq 0$. والصيغة الأخيرة تتحقق فقط وفقط إذا كانت $x_2 - x_1 \neq n\pi$، حيث n أي عدد صحيح.

b) بما أن $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$ و $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$، فإن المعادلات قابلة للحل فقط وفقط إذا $y_2 = (-1)^n y_1$.

1I. دالات المتجهات والمعادلات الوسيطة

1I-1.

لتكن $\mathbf{u} = \mathrm{dir}\,(\mathrm{a}\,\mathbf{i} + \mathrm{b}\,\mathbf{j}) = \frac{\mathrm{a}\,\mathbf{i}+\mathrm{b}\,\mathbf{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$، بالتالي:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + vt\mathbf{u} = \frac{(x_0 + avt)\mathbf{i} + (y_0 + bvt)\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1I-2.

a) طالما أن الحركة هي انعكاسية في المحور x لحركة عكس عقارب الساعة الاعتيادية، فإن $\mathbf{r} = a\cos(\omega t)\,\mathbf{i} - a\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$. (إن هذه الحالة خاصة بعض الشيء؛ الجزء (b) يوضح طريقة أكثر عمومية في التطبيق.)

b) متجه الموضع هو: $\mathbf{r} = a\cos\theta\mathbf{i} - a\sin\theta\,\mathbf{j}$. وعند الزمن $t = 0$، الزاوية $\theta = \pi/2$؛ ثم تتناقص خطياً بنسبة تغير ω. لذلك فإن $\theta = \pi/2 - \omega t$؛ بالتعويض واستخدام قوانين النسب المثلثية من أجل $\cos(A + B)$ و $\sin(A + B)$، فإننا نحصل على:

$$\mathbf{r} = a\cos(\pi/2 - \omega t)\,\mathbf{i} - a\sin(\pi/2 - \omega t)\,\mathbf{j} = a\sin\omega t\,\mathbf{i} + a\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

(في وقت لاحق، سنتمكن من معرفة اشتقاق خاص آخر وذلك بملاحظة أن هذه الحركة هي انعكاس في الخط القطري $y = x$ بالنسبة لحركة عكس عقارب الساعة الاعتيادية البادئة من $(a, 0)$، وبالتالي سنحصل على متجه الموضع $\mathbf{r}(t)$ وذلك بتبديل x و y في دالة متجه الموضع:

$$.\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\mathbf{i} + \sin(\omega t)\,\mathbf{j}$$

1I-3.

a) $x = 2\,cos^2 t$، $y = sin^2 t$، $x + 2y = 2$؛ فقط جزء هذا المستقيم الذي يقع بين $(0,1)$ و $(2,0)$ هو الذي يُتبع، ذهاباً وإياباً.

b) $x = \cos 2t$، $y = \cos t$؛ نتخلص من t لنحصل على معادلة xy، فيصبح لدينا:

$$\cos 2t = cos^2 t - sin^2 t = 2cos^2 t - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2y^2 - 1$$

وفقط جزء القطع المكافئ المحصور بين $(1,1)$ و $(1,-1)$ هو المُتَّبع، ذهاباً وإياباً.

c) $x = t^2 + 1$، $y = t^3$؛ بالتخلص من t ، نحصل على $y^2 = (x-1)^3$؛ المنحنى يُتَّبع بشكل كامل طالما t تتزايد. وحيث y تنتقل من $-\infty$ إلى ∞ .

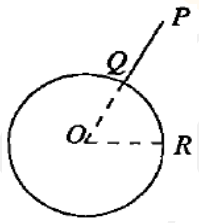
d) $x = \tan t$، $y = \sec t$؛ قم بالتخلص من t بواسطة قانون النسب المثلثية التالي $tan^2 t + 1 = sec^2 t$، فتحصل على $y^2 - x^2 = 1$. هذه هي معادلة القطع الزائد؛ القسم الأعلى منه يُتَّبع عندما تكون $-\pi/2 < t < \pi/2$، والقسم السفلي يُتَّبع عندما تكون $\pi/2 < t < 3\pi/2$. ومن ثم تتكرر .

.1I-4

$OP = |OP| \cdot \text{dir } OP$؛ $\text{dir } OP = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$؛

$|OP| = |OQ| + |QP| = a + a\theta$ ، حيث أن $|QP| = \text{arc QR} = a\theta$.

لذا



$OP = a(1+\theta)(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})$،

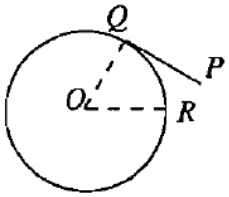
أو $x = a(1+\theta)\cos\theta$، $y = a(1+\theta)\sin\theta$.

.1I-5 $OP = OQ + QP$؛ $OQ = a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})$

$QP = |QP|\,\text{dir QP} = a\theta(\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})$،

حيث أن $|QP| = \text{arc QR} = a\theta$. (راجع التمرين 1A-7a من أجل dir QP)

لذلك، $OP = \mathbf{r} = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)\mathbf{i} + a(\sin\theta - \theta\cos\theta)\,\mathbf{j}$.



.1I-6

a) $\mathbf{r}_1(t) = (10-t)\mathbf{i}$ "الصياد"؛ $\mathbf{r}_2(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$ "الأرنب"، ولاحظ أيضاً أن

$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ، لذا في الحقيقة $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$)

السهم $= HA = \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$ ، حيث أن القوس له طول وحدة

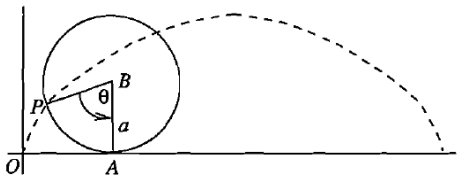
$= \frac{(t-5)\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}}{\sqrt{2t^2-10t+25}}$، وهذا بعد القيام ببعض الجبر.

b) إنه أسهل من الناحية الحسابية تصغير مربع المسافة بين الصياد والأرنب، بدلاً من حساب المسافة نفسها؛ حيث سوف تحصل على نفس قيمة t في كلتا الحالتين.

لتكن $f(t) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = 2t^2 - 10t + 25$،

ومنه فإن $f'(t) = 4t - 10 = 0$ عند $t = 2.5$

1I-7. $OP = OA + AB + BP$



$AB = a\,\mathbf{j}$ ؛ $OA = \text{arc}AP = a\theta$؛

$BP = a(-\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})$

لذلك، $OP = a(\theta - \sin\theta)\,\mathbf{i} + a(1 - \cos\theta)\,\mathbf{j}$

1J. مشتقات المتجه

1J-1

(a $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}$ ؛ $\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}$ ؛ $|\mathbf{v}| = \sqrt{e^t\mathbf{i} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}}$ ، $\mathbf{T} = \frac{e^t\mathbf{i} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}}{\sqrt{e^t\mathbf{i} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}}}$
$\mathbf{a} = e^t\mathbf{i} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{j}$.

(b $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ؛ $\mathbf{v} = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ ؛ $|\mathbf{v}| = t\sqrt{4 + 9t^2}$ ؛ $\mathbf{T} = \frac{2\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}}{\sqrt{4 + 9t^2}}$
$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j}$.

(c $\mathbf{r} = (1 - 2t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (-2 + 2t^2)\mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{v} = 2t(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ؛ $|\mathbf{v}| = 6t$ ؛
. $= 2(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ؛ $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

1J-2

(a $\mathbf{T} = \frac{-2t\,\mathbf{i} + (1 - \mathrm{t}^2)\mathbf{j}}{1 + t^2}$ ؛ $|\mathbf{v}| = \frac{1}{1 + t^2}$ ؛ $\mathbf{v} = \frac{-2t\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}}{(1 + t^2)^2}$ ؛ $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{1}}{1 + t^2}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{t}}{1 + t^2}\mathbf{j}$

b) $|\mathbf{v}|$ أكبر ما يمكن عند $t = 0$، أي عند النقطة $(1,0)$. ولا توجد هناك نقطة تكون عندها $|\mathbf{v}|$ أصغر ما يمكن؛ وعندما $t \to \infty$ أو $t \to -\infty$، فإن النقطة $P \to (0,0)$ و $|\mathbf{v}| \to 0$.

c) متجه الموضع يظهر $y = tx$، ومنه $t = y/x$؛ وبالتعويض في $x = 1/(1 + t^2)$ فإننا نحصل بعد القيام ببعض الجبر على المعادلة $x^2 + y^2 - x = 0$؛ وبإكمال المربع نحصل على المعادلة $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$، والتي تعبر عن دائرة ذات المركز $(\frac{1}{2}, 0)$ ونصف القطر ½ .

1J-3

$\frac{d}{dt}(x_1y_1 + x_2\,y_2) = \begin{cases} x_1'y_1 + x_1y_1' \\ x_2'y_2 + x_2y_2' \end{cases}$ ، وبإضافة الأعمدة نحصل على:

$$(x_1, x_2)' \cdot (y_1 y_2) + (x_1 x_2) \cdot (y_1 y_2)' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{dt}}$$

.1J-4

a) حيث أن النقطة P تتحرك على الجسيم الكروي، لنقل ذات نصف القطر a ،

بالاشتقاق،
$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = a^2$$
$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$$

وهذا ينص على أن $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \cdot x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k} = 0$ لكل قيم t، أي أن $\mathbf{r}.\mathbf{r}' = 0$.

b) بالاستناد إلى الفرضية، $\mathbf{r}(t)$ لها الطول a ، لكل قيم t ، نحصل على سلسلة من الآثار المترتبة:

$$|\mathbf{r}| = a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = a^2 \quad \Rightarrow \quad 2r \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}.\mathbf{v} = 0$$

c) باستخدام أولاً النتيجة في التمرين **1J-3**، ومن ثم $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2$، فإننا نحصل على:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathrm{c}\,(\text{ثابت}) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{c}$$

وهذا يُظهر أن رأس $\mathbf{r}$ يتحرك على جسيم كروي ذو نصف قطر $\sqrt{c}$.

.1J-5

a) $|\mathbf{v}| = c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathrm{c}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، بالرجوع إلى **1J-3**. لذلك متجهات السرعة الاتجاهية والعجلة متعامدة على بعضها.

b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{a}$ ، وهذا يظهر أن السرعة ثابتة.

.1J-6

a) $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{a}\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$؛

$\mathbf{v} = -a\sin t\;\mathbf{i} + a\cos t\;\mathbf{j} + b\mathbf{k}$؛

$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$؛

$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{a^2+b^2}}$؛

$\boldsymbol{a} = -a(\cos t\ \mathbf{i} + sin\, t\, \mathbf{j})$.

b) بالحساب المباشر باستخدام المركبات، نلاحظ أن $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$؛ وهذا صحيح أيضاً من الناحية النظرية للتمرين **1J-5b**، وهذا طالما أن السرعة ثابتة.

.1J-7

a) إن المعيار هو $|\mathbf{v}| = 1$؛ أي، إذا قسنا طول القوس s فتكون $s = 0$ عند $t = 0$، ومن ثم s تتزايد مع t:

$$|\mathbf{v}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = t + c \quad \Rightarrow \quad s = t.$$

b) $\mathbf{r} = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + at)\mathbf{j}$؛

$\mathbf{v} = a(\mathbf{i} + \mathbf{j})$؛

$|\mathbf{v}| = a\sqrt{2}$؛

وهكذا، اختر $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) اختر a و b لتكون أرقام غير سالبة بحيث يكون: $a^2 + b^2 = 1$، بالتالي $|\mathbf{v}| = 1$.

.1J-8

a) لتكن $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ؛ إذاً $u(t)\mathbf{r}(t) = ux\ \mathbf{i} + uy\ \mathbf{j}$ ، واشتقاق هذا يعطي:

$$(u\mathbf{r})' = (ux)'\mathbf{i} + (uy)'\mathbf{j} = (u'x + ux')\mathbf{i} + (u'y + uy')\mathbf{j} = u'(x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}) + u(x'\ \mathbf{i} + y'\mathbf{j}) = u'\mathbf{r} + u\mathbf{r}'$$

b) $$\frac{d}{dt}e^t(\cos t\ \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j}) = e^t(\cos t\ \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j}) + e^t(-\sin t\, \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j})$$
$$= e^t\big((\cos t\ - \sin t)\ \mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j}\big)$$

لذلك، $|\mathbf{v}| = e^t|(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j}| = 2e^t$ ، وهذا بعد القيام بالحسابات.

.1J-9

a) $\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 5\sin t\,\mathbf{j} + 5\cos t\,\mathbf{k} \quad \Rightarrow |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{25}\cos^2 t + \mathbf{25}\sin^t} = \mathbf{5}$.

b) $\mathbf{v} = -3\sin t\,\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 4\sin t\,\mathbf{k} \Leftarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \mathbf{5}$

c) $\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3\cos t\,\mathbf{i} - 5\sin t\,\mathbf{j} - 4\cos\ t\,\mathbf{k} = -\mathbf{r}$.

d) بالمعاينة، إحداثيات x, y, z للنقطة p تحقق المعادلة $4x - 3z = 0$، والتي تمثل معادلة مستوي يمر بنقطة المبدأ.

e) حيث أنه في الجزء (a) كانت النقطة P تتحرك على سطح جسيم كروي له نصف قطر 5 ومركزه نقطة المبدأ، ومن الجزء (d) النقطة أيضاً تقع في مستوٍ يمر بنقطة المبدأ، إذن، مسارها يجب أن يكون تقاطع هذين السطحين، والذي يمثل الدائرة الكبيرة ذات نصف القطر 5 على الجسيم الدائري.

.1J-10

a) استخدم نتائج التمرين **1J-6**:

$$\mathbf{T} = \frac{-a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ؛ \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

وباستخدام قاعدة السلسلة: $\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|$. لذا: $\kappa\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|-a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$،

وحيث أن البسط على الطرف الأيسر له القيمة $|a|$، فإننا نحصل على: $\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2}$.

b) إذا كانت $b = 0$، الحلزون هو دائرة ذات نصف قطر $|a|$ تقع في المستوي xy، و$\kappa = \frac{1}{|a|}$.

1K. قانون كيبلر الثاني

1K-1.

$\frac{d}{dt}(x_1y_1 + x_2\,y_2) = \begin{cases} x_1'y_1 + x_1y_1' \\ x_2'y_2 + x_2y_2' \end{cases}$ ، وبإضافة الأعمدة نحصل على:

$$\langle x_1, x_2\rangle' \cdot \langle y_1 y_2\rangle + \langle x_1 x_2\rangle \cdot \langle y_1 y_2\rangle' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{dt}}$$

1K-2.

في بُعدين، $\mathbf{s}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$، $\mathbf{s}'(t) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$.

لذا:

$$\mathbf{s}'(t) = 0 \;\Rightarrow\; x'(t) = 0,\; y'(t) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = k_1,\; y(t) = k_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{s}(t) = (k_1, k_2)$$

حيث k_1, k_2 هما ثوابت.

1K-3.

بما أن $\mathbf{F}$ مركزية، فإنه لدينا $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$؛ وباستخدام قانون نيوتن، $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{\mathrm{m}} = (c/m)\mathbf{r}$. وبالتالي:

$$\mathbf{F} = c\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \frac{c}{m}\,\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \qquad \text{بالاستناد إلى (7)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{K} \qquad \text{(متجه ثابت، انظر التمرين 2-K)} \qquad (*)$$

السطر الأخير (*) يظهر أن $\mathbf{r}$ عمودية على $\mathbf{K}$، ولذلك فرأسها (النقطة P) تقع في المستوي الذي يمر بنقطة المبدأ، والذي يكون فيه $\mathbf{K}$ هو المتجه المتعامد. وأيضاً، حيث أن:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = 2\frac{dA}{dt} \qquad \text{بالاستناد إلى (2)}$$

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = |K| \qquad \text{بالاستناد إلى (*)}$$

فإننا نستخلص أن: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|K|$ ، وهذا يُظهر المساحة الممسوحة بنسبة ثابتة.