2. التفاضل الجزئي

2A. الدالات والمشتقات الجزئية

2A-1. ارسم منحنيات الرتبة/المستوى لكل من الدالات التالية. أيضاً، بالنسبة للأسئلة من a إلى d، ارسم الرسم البياني للدالة والذي يقع في الثمن الأول. حاول إن أمكن أن يتضمن الحل الرسم البياني التقريبي في الاحداثيات الفراغية.

(a $1-x-y$ **(b** $\sqrt{x^2+y^2}$ **(c** x^2+y^2 **(d** $1-x^2-y^2$

(e x^2-y^2

2A-2. احسب المشتقات الجزئية الأولى لكل من الدالات التالية:

(a $w=x^3y-3xy^2+2y^2$ **(b** $z=\frac{x}{y}$ **(c** $\sin(3x+2y)$ **(d** e^{x^2y}

(e $z=x\ln(3x+y)$ **(f** x^2z-2yz^3

2A-3. أثبت أن $f_{xy}=f_{yx}$ لكل مما يلي:

(a x^my^n : (m، n رقمان صحيحان موجبان) **(b** $\frac{x}{x+y}$ **(c** $\cos(x^2+y^2)$

(b $f(x)g(x)$، وذلك لأي f و g قابلة للاشتقاق.

2A-4. باستخدام $f_{xy}=f_{yx}$، أوجد قيمة الثابت a والتي توجد من أجله الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون $f_x=axy+3y^2$، $f_y=x^2+6xy$، ومن ثم وباستخدم هذه القيمة أوجد هذه الدالة عن طريق المعاينة.

2A-5. أظهر أن الدالات التالية $w=f(x,y)$ تحقق المعادلة $w_{xx}+w_{yy}=0$ (والتي تسمى معادلة لابلاس ثنائية البعد):

(a $w=e^{ax}\sin ay$، (a ثابت). **(b** $w=\ln(x^2+y^2)$

2B. المستوي المماس؛ التقريب الخطي

2B-1. أعط معادلة المستوي المماس لكل من الأسطح التالية عند النقطة المشار إليها.

(a $z = xy^2$، $(1,1,1)$ **(b** $w = y^2/x$، $(1,2,4)$

2B-2.

(a أوجد معادلة المستوي المماس للمخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ عند النقطة $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ الواقعة على المخروط.

(b اكتب المعادلات الوسيطة للشعاع المنطلق من نقطة المبدأ والمار بالنقطة P_0، واستخدم هذه المعادلات لإظهار أن الشعاع يقع على كلٍ من المخروط والمستوي المماس عند النقطة P_0.

2B-3. باستخدام صيغة التقريب، أوجد التغير التقريبي في وتر مثلث قائم، إذا كانت ساقاه، ذات الطول 3 و4 مبدئياً، كلتاهما تزيدان بـ 0.010.

2B-4. المقاومة المكافئة R لسلكين متوازيين (لكل منهما المقاومات R_1 و R_2 على الترتيب) معطاة بالمعادلة: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

فإذا كانت المقاومة في السلكين مبدئياً تساوي 1 و 2 أوم، مع خطأ محتمل يساوي ± 0.1 أوم، فما هي قيمة R، وبأي قدر يمكن أن تكون خاطئة؟ (استخدم صيغة التقريب.)

2B-5. أعط النموذج الخطي لكل من الدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

(a $(x + y + 2)^2$ عند $(0,0)$، وعند $(1,2)$.

(b $e^x \cos y$ عند $(0,0)$، وعند $(0, \frac{\pi}{2})$.

2B-6. لحساب حجم اسطوانة ذات نصف قطر 2 وارتفاع 3 تقريباً، كم يجب أن تكون دقة حساب كلٍ من الارتفاع ونصف القطر بحيث لا تتجاوز نسبة الخطأ في حساب الحجم 0.1؟

.2B-7

a) إذا كانت x و y معروفة ضمن 0.01 ، بأي دقة يمكن أن تُحسب الإحداثيات القطبية r و θ ؟ افترض أن $x = 3$ و $y = 4$.

b) في تلك النقطة، هل r و θ أكثر تأثراً (حساسيةً) للتغيرات الصغيرة في x ، أم في y؟ ارسم صورة تبين كل من x، y، r، θ وأكّد نتائجك باستخدام الحدس الهندسي.

***2B-8.** a و b هما ضلعين في مثلث، و θ هي الزاوية بينهما. الضلع الثالث هو c.

a) أعط تقريباً لـِ Δc بدلالة a، b، c، θ و Δa، Δb، $\Delta\theta$.

b) إذا كانت $a = 1$، $b = 2$، $\theta = \pi/3$، فهل c أكثر تأثراً (حساسية) للتغيرات الصغيرة في a أو b؟

.2B-9

a) حول النقطة $(1,0)$، هل $w = x^2(y+1)$ أكثر تأثراً (حساسية) للتغيرات الصغيرة في x، أم في y ؟

b) ماذا يجب أن تكون نسبة Δy إلى Δx وذلك حتى تكون التغيرات الصغيرة في هذه النسبة لا تنتج أي تأثير في w؟ بمعنى أنه لا يوجد تغيير من الدرجة الأولى – بالطبع w ستتغير قليلاً، ولكن كـ$(\Delta x)^2$ وليس كـ Δx.

***2B-10.**

a) إذا كانت $|a| \gg |b|, |c|, |d|$ ، فلأي مدخلة تكون قيمة $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ أكثر تأثراً (حساسية) ؟

b) من أجل محدد 3×3، كيف ستتمكن من تحديد المدخلة التي سيتأثر بها المحدد بشكل أكثر؟

(خذ بعين الاعتبار مفكوكات لابلاس المتنوعة بالنسبة للمعاملات المرافقة لصف معطى أو عمود معطى.)

2C. التفاضلات؛ التقريبات

2C-1. أوجد التفاضل (dw أو dz). وليكن الجواب واضحاً قدر الإمكان.

(a $w = \ln(xyz)$ **(b** $w = x^3y^2z$ **(c** $z = \frac{x-y}{x+y}$

(d $w = \sin^{-1}\frac{u}{t}$ (استخدم $\sqrt{t^2-u^2}$)

2C-2. أبعاد صندوق مستطيل هي 5، 10، 20 سم، بخطأ محتمل في القياسات يقدر بـِ ± 1. سم. استخدم التفاضل لإيجاد قيمة الخطأ المحتمل الذي قد يلحق بحجمه.

2C-3. ضلعين من مثلث لهما الأطوال a و b على الترتيب، بحيث θ هي الزاوية المحصورة بينهما. لتكن A هي مساحة المستطيل.

(a عبّر عن dA بدلالة المتغيرات ومشتقاتها.

(b إذا كانت $a = 1$، $b = 2$، $\theta = \pi/6$ ، فلأي متغير تكون A أكثر تأثراً (حساسية)؟ أقل تأثراً؟

(c باستخدام القيم في الجزء (b)، إذا كان الخطأ المحتمل في كل قيمة هو 0.02، فما هو الخطأ المحتمل في A ، مقرباً الجواب إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

2C-4. يرتبط الضغط والحجم ودرجة الحرارة لغاز مثالي محجوز في وعاء بالمعادلة $PV = kT$، حيث k ثابت يعتمد على كمية الغاز والوحدات المستخدمة. احسب dP بطريقتين:

(a عبّر عن P بدلالة V و T ، ثم احسب dP بالطريقة العادية.

(b احسب اشتقاق كلا طرفي المعادلة، للحصول على "معادلة تفاضلية"، ثم قم بالحل جبرياً لـِ dP.

(c أظهر كيف أن الجوابان متوافقين.

2C-5. المعادلات الآتية تعرّف w صراحةً كدالة بمتغيرات مختلفة. أوجد dw بدلالة جميع المتغيرات عن طريق أخذ الاشتقاق لكلا الطرفين والحل جبرياً بالنسبة لـِ dw.

(a $\frac{1}{w} = \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ **(b** $u^2 + 2v^2 + 3w^2 = 10$

2D. التدرج والمشتقة الاتجاهية

2D-1. في كلٍّ من الحالات الآتية، الدالة f، النقطة P، المتجه **A** جميعها معطيات. احسب تدرج f عند النقطة، والمشتقة الاتجاهية $\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u}}$ عند النقطة، وذلك في الاتجاه u للمتجه المعطى **A**.

(a x^3+2y^3؛ $(1,1)$، $\mathbf{i}-\mathbf{j}$

(b $w=\frac{xy}{z}$؛ $(2,-1,1)$، $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

(c $z=x\sin y+y\cos x$؛ $(0,\pi/2)$، -3**i**+4**j**

(d $w=\ln(2t+3u)$؛ $(-1,1)$، 4**i**-3**j**

(e $f(u,v,w)=(u+2v+3w)^2$؛ $(1,-1,1)$، -2**i**+2**j**-**k**

2D-2. بالنسبة للدوال التالية، كلٍ منها مع نقطة معطاة P:

(i) أوجد القيم الكبرى (القصوى) والصغرى لـ $\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u}}$، وذلك حيث أن **u** متغيرة.

(ii) بأي الاتجاهات تقع كلٌ من القيم الكبرى (القصوى) والصغرى.

(iii) أوجد الاتجاه/الاتجاهات **u** والتي من أجلها تكون $\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u}}=0$.

(a $w=\ln(3x-4y)$، $(1,1)$ **(b** $w=xy+yz+xz$، $(1,-1,2)$

(c $z=\sin^2(t-u)$، $(\frac{\pi}{4},0)$.

2D-3. بالنظر إلى الأسطح التالية كأسطح كنتورية (كفافية) لدالة $f(x,y,z)$، أوجد المستوي المماس لها عند النقاط المعطاة.

(a $xy^2z^3=12$ ، $(3,2,1)$؛

(b المجسم الإهليجي (مجسم القطع الناقص) $x^2+4y^2+9z^2=14$، $(1,1,1)$

(c المخروط $x^2+y^2-z^2=0$، (x_0,y_0,z_0) (بسّط جوابك)

2D-4. الدالة $T=\ln(x^2+y^2)$ تعطي درجة الحرارة عند كل نقطة على المستوي (ماعدا $(0,0)$).

a) عند النقطة P: $(1,2)$، بأي اتجاه يجب أن تتحرك لتحصل على أسرع زيادة في T ؟

b) عند P، كم يجب أن تتحرك في الاتجاه المحسوب في الجزء (a) لتحصل على زيادة مقدارها 0.20 في T ؟

c) عند P، تقريباً كم يجب أن تبتعد في الاتجاه i+j لكي تحصل على زيادة مقدارها 0.12 ؟

d) عند P، في أي اتجاه/اتجاهات سيكون معدل التغير في درجة الحرارة يساوي صفراً؟

2D-5. الدالة $T = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ تعطي درجة الحرارة عند كل نقطة في الفضاء.

a) ما هو شكل خطوط التحارر (خطوط تساوي درجات الحرارة)؟

b) عند النقطة P: $(1,1,1)$، بأي اتجاه يجب أن تتحرك لتحصل على أسرع زيادة في T ؟

c) عند P، كم يجب أن تتحرك في الاتجاه المحسوب في الجزء (a) لتحصل على زيادة مقدارها 1.2 في T ؟

d) عند P، ، تقريباً كم يجب أن تبتعد في الاتجاه i-2j+2k لكي تحصل على زيادة مقدارها 0.10 ؟

2D-6. أثبت أن $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$، واستنتج أن $\left.\frac{d(uv)}{ds}\right|_{\mathrm{u}} = u\left.\frac{dv}{ds}\right|_{\mathrm{u}} + v\left.\frac{du}{ds}\right|_{\mathrm{u}}$ ؟

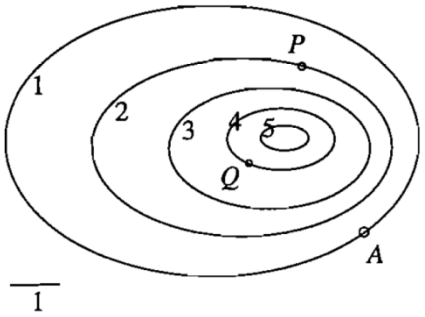
(افترض أن u و v هما دالاتان بمتغيرين.)

2D-7. بفرض أن $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathrm{u}} = 2$ ، $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{v} = 1$ عند النقطة P، حيث $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ و $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

أوجد $(\nabla w)_P$.

(هذا يوضح كيف أن التدرج يمكن حسابه بمعرفة المشتقات الاتجاهية في أي اتجاهين غير متوازيين، وليس فقط الاتجاهين الأساسيين **i** و **j** .)

2D-8. الصورة المرافقة توضح منحنيات المستوى لدالةٍ ما $w = f(x,y)$. قيمة w على كل منحنى قد تم الإشارة إليها. مسافة الوحدة قد أعطيت أيضاً.



a) ارسم متجه التدرج عند A؟

b) عند النقطة B أوجد أين تكون $w = 3$ و $\partial w/\partial x = 0$.

c) عند النقطة C أوجد أين تكون $w = 3$ و $\partial w/\partial y = 0$.

d) عند النقطة P قدّر قيمة كل من $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$.

e) عند النقطة Q، قدّر قيمة dw/ds في الاتجاه i+j ؟

f) عند النقطة Q، قدّر قيمة dw/ds في الاتجاه i-j ؟

g) تقريباً أين يكون التدرج معدوماً (صفراً) ؟

2E. قاعدة السلسلة

2E-1. فيما يلي، أوجد $\frac{df}{dt}$ من أجل الدالة المركبة $f(x(t),y(t),z(t))$ بطريقتين مختلفتين:

(i) استخدم قاعدة السلسلة، ثم عبّر عن جوابك بدلالة t وذلك باستخدام $x=x(t)$، الخ.....

(ii) عبّر عن الدالة المركبة f بدلالة t، ثم اشتق.

(a $w=xyz$، $x=t$، $y=t^2$، $z=t^3$

(b $w=x^2-y^2$، $x=\cos t$، $y=\sin t$

(c $w=\ln(u^2+v^2)$، $u=2\cos t$، $y=2\sin t$

2E-2. لكل من الآتي، المعلومات عن التدرج لدالة غير معروفة $f(x,y)$ معطاة؛ x وy هما بدلالة t. استخدم قاعدة السلسلة لتكتشف معلومات أخرى عن الدالة المركبة $w=f(x(t),y(t))$، بدون القيام بحساب f صراحةً.

(a $\nabla w=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$؛ P: (1,0) عند النقطة $x=\cos t$، $y=\sin t$. أوجد قيمة $\frac{dw}{dt}$ عند $t=0$.

(b $\nabla w=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$؛ $x=\cos t$، $y=\sin t$. أوجد $\frac{dw}{dt}$ واستنتج لأي قيم t تكون صفراً.

(c $\nabla f=\langle 1,-1,2\rangle$ عند (1,1,1). ولتكن $x=t$، $y=\mathrm{t}^2$، $\mathrm{z}=\mathrm{t}^3$. أوجد $\frac{df}{dt}$ عند $t=1$.

(d $\nabla f=\langle 3x^2y,x^3+z,y\rangle$؛ $x=t$، $y=\mathrm{t}^2$، $\mathrm{z}=\mathrm{t}^3$. أوجد $\frac{df}{dt}$.

2E-3.

(a استخدم قاعدة السلسة لـِ $f(u,v)$، حيث $u=u(t)$، $v=v(t)$، وذلك لإثبات قاعدة حاصل الضرب: $D(uv)=vDu+uDv$، حيث $D=\frac{d}{dt}$.

(b باستخدام قاعدة السلسلة لـِ $f(u,v,w)$ ، اشتق قاعدة حاصل ضرب مشابهة لأجل $\frac{d}{dt}(uvw)$، واستخدمها لمفاضلة $te^{2t}\sin t$.

(c* اشتق بشكل مشابه قاعدة للمشتقة $\frac{d}{dt}u^v$، واستخدمها لمفاضلة $(\ln t)^t$.

2E-4. لتكن $w = f(x,y)$، وبافتراض أن $\nabla w = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ عند $(0,1)$.

فإذا كانت $x = u^2 - v^2$، $y = uv$، أوجد $\frac{\partial w}{\partial u}$، $\frac{\partial w}{\partial v}$ عند $u = 1$، $v = 1$.

2E-5. لتكن $w = f(x,y)$، وبافتراض أننا غيرنا من الإحداثيات الديكارتية إلى القطبية:
$x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$.

a) أثبت أن $(w_x)^2 + (w_y)^2 = (w_r)^2 + \frac{1}{r^2}(w_\theta)^2$.

b) بفرض أن $\nabla w = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ عند النقطة $x = 1$، $y = 1$. أوجد $\frac{\partial w}{\partial r}$، $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ وذلك عندما تكون $r = \sqrt{2}$، $\theta = \pi/4$، من ثم تحقق من العلاقة في الجزء (a)، عند النقطة.

2E-6. اجعل $w = f(x,y)$، وقم بتغييرٍ في المتغيرات $x = u^2 - v^2$، $y = 2uv$. أظهر أن:

$$(w_x)^2 + (w_y)^2 = \frac{(w_u)^2 + (w_v)^2}{4(u^2 + v^2)}$$

2E-7. مصفوفة جاكوبي بالنسبة لتغير المتحولات $x = x(u,v)$، $y = y(u,v)$ تعرّف على أنها $= \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$.

فإذا كانت $\nabla f(x,y)$ تمثل متجه الصف $\langle f_x, f_y \rangle$، أثبت أن:

$$\nabla f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = \nabla f(x,y) \cdot J \qquad \text{(ضرب المصفوفة)}$$

2E-8.

a) لتكن $w = f(y/x)$؛ أي أن w هي مركب الدوال $w = f(u)$، $u = y/x$. أثبت أن w تحقق معادلة المشتقة الجزئية $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

b) لتكن $w = f(x^2 - y^2)$؛ أثبت أن w تحقق معادلة المشتقة الجزئية $y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

c) لتكن $w = f(ax + by)$؛ أثبت أن w تحقق معادلة المشتقة الجزئية:

$$b\frac{\partial w}{\partial x} - a\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ .}$$

مسائل عن القيم القصوى والصغرى2F.

2F-1. أوجد النقطة/النقاط التي تقع على كلٍ من الأسطح التالية والتي تكون الأقرب إلى نقطة المبدأ. (تلميح: سيكون الجبر أسهل إذا قمت بحساب القيمة الصغرى لمربع المسافة بدلاً من المسافة نفسها)

(a $xyz^2 = 1$ **(b** $x^2 - yz = 1$

2F-2. تم إنتاج صندوق مستطيل من الورق المقوى (كرتون)؛ الجانبين لها نفس السماكة، الطرفين ذات سماكة مضاعفة، والقاعدة سماكتها ثلاثة أضعاف، والجزء العلوي مفتوح. حجم هذا الصندوق هو 1 قدم مكعبة؛ ماذا يجب أن تكون أبعاده لتحقيق أقل كمية من استخدام الورق المقوى؟

***2F-3.** باعتبار أن جميع المستويات تمر عبر النقطة (2,1,1) وجميع نقاط تقاطعها مع المحاور الإحداثية موجبة. لأي مستوي من هذه المستويات يكون حاصل ضرب نقاط التقاطع مع المحاور أصغر ما يمكن؟ (تلميح: خذ المستوي ليكون على النمط $z = ax + by + c$، حيث a و b هما المتغيرات المستقلة.)

***2F-4.** أوجد النقطة القصوى لِـ $x^2 + 2xy + 4y^2 + 6$، وأظهر كيف أنها قيمة صغرى عن طريق الإكمال إلى مربع كامل.

2F-5. درج صندوق مفتوح من الأعلى؛ الجزء السفلي والخلفي مصنوعان من خشب رديء تكلفتهما 1$/قدم مربع؛ الجانبين أكثر سماكة ، وتكلفتهما 2$/قدم مربع. أما تكلفة الواجهة الأمامية فهي 4$/قدم مربع. الحجم يساوي 2.5 قدم مكعب. ما الأبعاد التي ستعطينا أقل تكلفة تصنيع؟

2G. الاستكمال البيني بالمربعات الصغيرة

2G-1. باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد الخط الأكثر ملائمة لنقاط البيانات الثلاثة المعطاة. ابدأ من الصفر، مستخدماً (2) في ملحق المحاضرة 9 "الاستكمال البيني عن طريق المربعات الصغرى" LS والتفاضل (استخدم قاعدة السلسلة). قم بالتحقق عن طريق رسم الخط والنقاط الثلاثة.

(a* (0,0)، (0,2)، (1,3) **(b*** (0,0)، (1,2)، (2,1) **(c** (1,1)، (2,3)، (3,2)

2G-2*. أثبت أن المعادلات (4) المتعلقة بطريقة المربعات الصغرى لها حل وحيد، ما لم تكن جميع قيم x_i متساوية. اشرح هندسياً السبب وراء هذا الاستثناء.

تلميح: استخدم الحقيقية التي تنص على أنه لجميع قيم u، لدينا $\sum_1^n (x_i - u)^2 \geq 0$، حيث أن المربعات دائماً موجبة. اكتب الطرف الأيسر كمعادلة تربيعة في u. على ماذا يدل ذلك بالنسبة للمعاملات؟ متى سيكون لها حل؟ (قم بحل هذين السؤالين مستخدماً الصيغة التربيعية.)

2G-3*. استخدم المربعات الصغرى لتلائم معادلة حدودية من الدرجة الثانية بحيث تمر عبر النقاط $(-1,-1)$، $(0,0)$، $(1,3)$ (راجع (6) و (7) في ملحق المحاضرة 9، LS).

2G-4. ما المعادلات الخطية في a, b, c والتي تقود إليها طريقة المربعات الصغرى، وذلك عندما تستخدمها لملائمة الصيغة الخطية $z = a + bx + cy$ لمجموعة من النقاط البيانية (x_i, y_i, z_i)، $i = 1, \dots, n$؟

2G-5*. ما المعادلات التي ستعتمد عليها لحساب a، وذلك عندما تحاول ملائمة المنحنى الأسي $y = e^{ax}$ لنقطتين بيانيتين $(1, y_1)$، $(2, y_i)$ مستخدماً طريقة المربعات الصغرى؟

المغزى من ذلك: لا تقوم بحلها بهذه الطريقة. عموماً، عند ملائمة معادلة أسية $y = ce^{ax}$ لمجموعة نقاط بيانية (x_i, y_i)، خذ اللوغارتم (log) لكلا الطرفين:

$$\ln y = ax + \ln c$$

وهذا يعطي دالة خطية في المتغيرات x و $\ln y$، والتي معاملاتها a و $\ln c$ يمكن حسابهما بتطبيق طريقة المربعات الصغرى لملائمة النقاط البيانية $(x_i, \ln y_i)$.

2H. القصوى-الصغرى: معيار المشتقة الثانية؛ المنحنيات ذات الحدود

2H-1. لكل من الدالات التالية، أوجد النقاط الحرجة، وصنفها باستخدام معيار المشتقة الثانية.

a) $x^2 - xy - 2y^2 - 3x - 3y + 1$ (b $3x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 4$

c) $2x^4 + y^2 - xy + 1$ (d $x^3 - 3xy + y^3$ (e $(x^3 + 1)(y^3 + 1)$

2H-2*. في ملحق المحاضرة 9، LS، استخدم معيار المشتقة الثانية للتحقق من أن النقطة الحرجة (m_0, b_0) التي تحدد خط التراجع (=المربعات الصغرى) $y = m_0x + b_0$، تقوم بتصغير الدالة $D(m, b)$ بشكل فعلي معطيةً مجموع مربعات الانحرافات. (ستحتاج إلى معادلة عدم المساواة الموجودة في **1B-15**، بالنسبة لـِ n متجه: $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$،

حيث $|A| = \sqrt{\sum a_i^2}$ و $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum a_i b_i$.)

2H-3. أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1$ التي تقع على النصف الأيمن للمستوي R المحدود بالخط القطري $x = -$.

2H-4. أوجد النقاط العظمى والصغرى للدالة $xy - x - y + 2$ والتي تقع في:

a) الربع الأول

b) المربع R: $0 \le x \le 2$، $0 \le y \le 2$؛

في كلتا الحالتين، استخدم المعلومات لتحديد نوعية النقطة الحرجة.

c) تأكد من نوع النقطة الحرجة مستخدماً اختبار المشتقة الثانية.

2H-5. أوجد النقاط العظمى والصغرى للدالة $f(x, y) = x + \sqrt{3}y + 2$ والتي تقع على قرص الوحدة R: $x^2 + y^2 \le 1$.

.2H-6

a) سلكين بطول 4 قطعا بنفس الطريقة إلى ثلاث قطع لهم الأطوال z, y, x؛ القطع الأربعة y, x تستخدم كأربعة أضلاع في مستطيل؛ أما القطعتين z فقد تم ثنيهما ووصلهما من النهاية لتشكلا معاً مربعاً ضلعه $z/2$. أوجد المستطيل والمربع الذين صُنعا بهذه الطريقة والذي تكون مساحتهما معاً أصغر ما يمكن وأكبر ما يمكن. ثم باستخدام الجواب، حدد ما هو نوع النقطة الحرجة.

b) تأكد من نوع النقطة الحرجة مستخدماً اختبار المشتقة الثانية.

.2H-7

a) أوجد النقاط العظمى والصغرى للدالة $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x$ والتي تقع على المستطيل R: $0 \leq x \leq 2$؛ $-1 \leq y \leq 2$؛ وباستخدام هذه المعلومات حدّد نوع النقطة الحرجة.

b) تأكد من نوع النقطة الحرجة مستخدماً اختبار المشتقة الثانية.

2I. مضاعفات لاجرانج

2I-1. صندوق مستطيل وضع في الثمن الأول بحيث تكون إحدى زواياه Q تقع على نقطة المبدأ والأضلاع الثلاثة المجاورة لـِ Q تقع على المستويات الإحداثية. الزاوية P المعاكسة قطرياً لـِ Q تقع على السطح $f(x,y,z)=c$. باستخدام مضاعفات لاجرانج، حدد بالنسبة لأي نقطة P سيكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن، ومن ثم فسّر كيف علمت أنها تعطي نقطة عظمى، وذلك إذا كان السطح هو:

a) المستوي $x+2y+3z=18$

b) مجسم القطع الناقص (إهليجي) $x^2+2y^2+4z^2=12$

2I-2. مستخدماً مضاعفات لاجرانج، حدد بالنسبة لأي نقطة P في الثمن الأول وعلى السطح $x^3y^2z=6\sqrt{3}$ تكون هي الأقرب إلى نقطة المبدأ. (كما في العادة، من السهل جبرياً تصغير $|OP|^2$ بدلاً من $|OP|$.)

2I-3. (قم بإعادة 2F-2، ولكن هذه المرة باستخدام مضاعفات لاجرانج.) تم إنتاج صندوق مستطيل من الورق المقوى (كرتون)؛ السطحان الجانبيان لهما نفس السماكة، سطحي المقدمة والخلفية ذات سماكة مضاعفة، والقاعدة سماكتها ثلاثة أضعاف، والجزء العلوي مفتوح. حجم هذا الصندوق هو 1 قدم مكعبة؛ ماذا يجب أن تكون أبعاده لتحقيق أقل كمية من استخدام الورق المقوى؟

2I-4. في درج خشبي مفتوح من الأعلى، الجانبان والخلفية تكلّف 2$/قدم مربع، الأرضية تكلّف 1$/قدم مربع، والواجهة الأمامية تكلّف 4$/قدم مربع. مستخدماً مضاعفات لاجرانج، أثبت أن المسائل التالية تقود إلى نفس مجموعة المعادلات الثلاثة في λ، إضافة إلى معادلة رابعة مختلفة، ولهم نفس الحل.

a) أوجد أبعاد الدرج والتي تؤدي إلى أكبر حجم لصناعته من خشب بتكلفة 72$.

b) أوجد أبعاد الدرج الأكثر اقتصاديةً والذي حجمه يساوي 24 قدم مكعب.

2J. المتغيرات غير المستقلة

ملاحظة: جميع المرجعيات للأمثلة وأرقام المعادلات تعود لملحق المحاضرة 14، N.

2J-1. في المثال 1، احسب عن طريق التعويض المباشر: a) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ b) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

2J-2. احسب المشتقتين في 2J-1 مستخدماً:

(i) قاعدة السلسلة (فاضل $z = x^2 + y^2$ صراحةً) (ii) التفاضل

2J-3. في المثال 2، استخدم قاعدة السلسلة لحساب المشتقات التالية، بدلالة x, y, z, t:

a $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ **b** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

2J-4. أعد 2J-3، ولكن قم بالحساب مستخدماً التفاضل.

2J-5. لتكن $S = S(p, v, T)$ هي انتروبيا لغاز معين، بفرض أنها تخضع لقانون الغاز المثالي (1). أعط تعبيرات بدلالة المشتقات الجزئية الرسمية S_p، S_v، S_T بالنسبة لكلٍ من:

a $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_v$ **b** $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v$

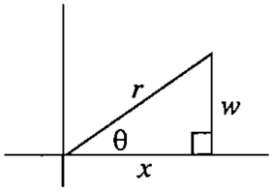
2J-6. إذا كانت $w = u^3 - uv^2$، $u = xy$، $v = u + x$، أوجد $\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x$ و $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u$ مستخدماً:

a) قاعدة السلسلة **b)** التفاضل

2J-7. لتكن P هي النقطة $(1, -1, 1)$، وافترض أن $z = x^2 + y + 1$، حيث أن $f(x, y, z)$ هي معادلة قابلة للاشتقاق والتي تكون $\nabla f(x, y, z) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ عند P.

ولتكن $g(x,y) = f(x, y(x,z), z)$؛ أوجد ∇g عند النقطة $(1,1)$، أي عند $x = 1$، $z = 1$.

2J-8. بتفسير r ، θ على أنها إحداثيات قطبية، اجعل $w = \sqrt{r^2 - x^2}$.



a) احسب $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta$، أولاً بكتابة w بدلالة r و θ.

b)* ثم احسبها بالتعويض في الصيغة النهائية المعطاة في المثال 6.

c)* وأخيراً، احصل على الجواب عن طريق المنطق الهندسي البديهي (انظر إلى الشكل)

***2J-9.** برهن صحة القاعدة الجاكوبية (16b)، باستخدام التفاضل؛ ثم استنتج (16a) من ذلك.

***2J-10.** برهن صحة القاعدتين الجاكوبيتين (17)، مستخدماً التفاضل.

***2J-11.** في المثال 7، أثبت أن القانون يأخذ النمط التالي عندما تتبدل المتحولات إلى U و V:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U + T\left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V - p\left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V = 0$$

***2J-12.** في المثال 7، أظهر أن تغير المتحولات يعطي للقانون الصيغة التالية:

a) $T - p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + \frac{\partial(T,U)}{\partial(V,p)} = 0$ ، (V، p متحولات مستقلة)

b) $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_U - T\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_p + p\frac{\partial(V,T)}{\partial(U,p)} = 0$ ، (U، p متحولات مستقلة)

2K. المعادلات التفاضلية الجزئية

2K-1. حيث أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ هي الإحداثيات القطبية الاعتيادية، أثبت أن $w = \ln r$ تحقق معادلة لابلاس ثنائية البعد (ملحق المحاضرة 15، P، (1) بدون z)، إذا كانت $(x, y) \neq (0,0)$. وما هي المشكلة مع $(0,0)$؟

(تذكر أن $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$، حيث سيجعل ذلك الحسابات أسرع)

2K-2. لأي قيمة/قيم n ستكون $w = (x^2 + y^2 + z^2)^n$ حلّ لمعادلة لابلاس ثلاثية الأبعاد (ملحق المحاضرة 15، P، (1))؟ أين رأيت مثل هذه الدالة في الفيزياء؟

2K-3. الحلول في التمرين 2K-1 و 2K-2 لها تناظر دائري وكروي على الترتيب. ولكن هناك العديد من الحلول الأخرى. على سبيل المثال:

a) أوجد جميع حلول معادلة لابلاس ثنائية البعد (راجع 2K-1) ذات الشكل:

$$w = ax^2 + bxy + cy^2$$

وأثبت أنه يمكن كتابتها جميعاً على الشكل $c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)$، حيث c_1، c_2 هما ثابتين عشوائيين. و f_1، f_2 هما عديدتي حدود خاصتين – أي، جميع الحلول مثل هذه هي تركيبات خطية لحلول عديدتي حدود خاصتين.

b)* أوجد واشتق نظير الجزء (a) بالنسبة لجميع حلول عديدة الحدود المكعبة $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ إلى معادلة لابلاس ثنائية البعد.

2K-4. أثبت أن معادلة الموجة أحادية البعد ((ملحق المحاضرة 15، P، (4)، المعادلة الأولى) مُحققة بأي معادلة من الشكل:

$$w = f(x + ct) + g(x - ct)$$

حيث $f(u)$ و $g(u)$ هي دالات عشوائية بمتغير واحد قابلة للاشتقاق مرتين.

خذ $g(u) = 0$، ثم فسّر فيزيائياً الحل $w = f(x + ct)$. ماذا تمثل $f(x)$؟ وما هي علاقة $f(x + ct)$ بها؟

لاحظ كيف أن هذا التمرين بيّن أن حل معادلة الموجة يمكن أن يتضمن بشكل كامل دالات عشوائية؛ ويبدو هذا واضحاً أيضاً من الملاحظات حول معادلة لابلاس التي تم حلها باستخدام أية دالة جاذبية أو كهروستاتيكية محتملة في كتلة أو منطقة خالية الشحنة من الفضاء.

2K-5. أوجد حلولاً لمعادلة السخونة أحادية البعد ((ملحق المحاضرة 15، P، (5)، المعادلة الأولى) والتي تكتب على الشكل:

$$w = \sin kx\, e^{rt} \qquad \text{(حيث k، r ثابتين.)}$$

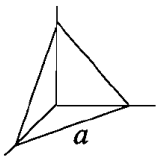
بحيث تحقق الشروط الإضافية لكل قيم t :

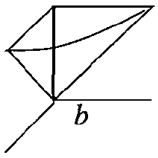
$$w(0,t) = 0 \text{،} \qquad w(1,t) = 0$$

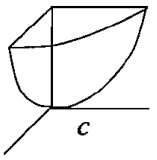
فسّر حلولك فيزيائياً. ما الذي يحصل لدرجة الحرارة عندما تكون $t \longrightarrow \infty$؟

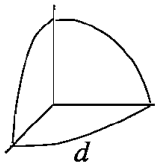
2. التفاضل الجزئي

2A. الدالات والمشتقات الجزئية









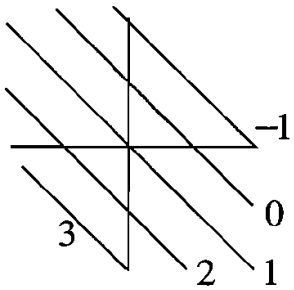
2A-1. في الصور أدناه، لم يتم التأشير على جميع منحنيات الرتبة/المستوى. في (c) و (d)، الصورة هي ذاتها، ولكن التسميات اختلفت. بتفصيل أكثر:

b) نقطة المبدأ هي منحنى المستوى 0؛ أما منحنيي المستوى غير المسميين هما 0.5 و 1.5؛

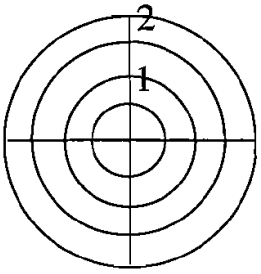
c) على اليسار، منحنيي مستوى تم تسميتهما؛ أما بالنسبة للمنحنيين غير المسميين فهما 2 و 3؛ ونقطة المبدأ هي منحنى المستوى 0.

d) على اليمين، منحنيي مستوى تم تسميتهما؛ وأما بالنسبة للمنحنيين غير المسميين فهما 1- و2-؛ ونقطة المبدأ هي منحنى المستوى 1.

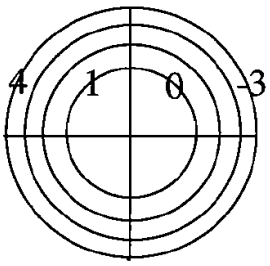
الرسومات الابتدائية للرسم البياني في الثمن الأول تقع على اليمين.



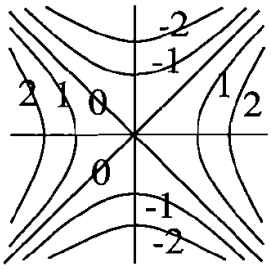
a



b



c, d



e

2A-2.

a) $f_x = 3x^2y - 3y^2$، $f_y = x^3 - 6xy + 4y$.

b) $z_x = \frac{1}{y}$، $z_y = -\frac{x}{y^2}$.

(c $f_x = 3\cos(3x+2y)$ ، $f_y = 2\cos(3x+2y)$.

(d $f_x = 2xye^{x^2y}$ ، $f_y = x^2e^{x^2y}$.

(e $z_x = \ln(2x+y) + \frac{2x}{2x+y}$ ، $z_y = \frac{x}{2x+y}$.

(f $f_x = 2xz$ ، $f_y = -2z^3$ ، $f_z = x^2 - 6yz^2$.

.2A-3

(a كلا الطرفين يساويان $mnx^{m-1}y^{n-1}$.

(b $f_x = \frac{y}{(x+y)^2}$ ، $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ ؛ $f_y = \frac{-x}{(x+y)^2}$ ، $f_{yx} = \frac{-(y-x)}{(x+y)^3}$.

(c $f_x = -2x\sin(x^2+y)$ ، $f_{xy} = (f_x)_y = -2x\cos(x^2+y)$ ؛

$f_y = -\sin(x^2+y)$ ، $f_{yx} = -\cos(x^2+y)\cdot 2x$.

(d كلا الطرفين هما $f'(x)g'(x)$.

.2A-4 $(f_x)_y = ax + 6y$ ، $(f_y)_x = 2x + 6y$ ؛ وبالتالي $f_{xy} = f_{yx} \Leftrightarrow a = 2$. بالمعاينة، نرى أنه إذا كانت $a = 2$، فإن $f(x,y) = x^2y + 3xy^2$ هي دالة تحتوي على f_x و f_y المُعطيتان.

.2A-5

(a $w_x = ae^{ax}\sin ay$ ، $w_{xx} = a^2e^{ax}\sin ay$ ؛

$w_y = e^{ax}a\cos ay$ ، $w_{yy} = e^{ax}a^2(-\sin ay)$ ؛ ومنه فإن $w_{yy} = -w_{xx}$.

(b لدينا $w_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$ ، $w_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. وإذا بادلنا بين x و y، فإن الدالة $w = \ln(x^2+y^2)$ ستبقى هي نفسها، بينما ستتحول w_{xx} إلى w_{yy}؛ وبما أن التبديل قد غير إشارة الطرف الأيمن فقط، فسينتج لدينا أن $w_{yy} = -w_{xx}$.

2B. المستوي المماس؛ التقريب الخطي

2B-1.

(a $z_x = y^2$، $z_y = 2xy$؛ وبالتالي عند النقطة $(1,1,1)$، سنحصل على $z_x = 1$، $z_y = 2$، ومنه فإن المستوي المماس هو $z = 1 + (x-1) + 2(y-1)$، أو $z = x + 2y - 2$.

(b $w_x = -y^2/x^2$، $w_y = 2y/x$؛ وبالتالي عند النقطة $(1,2,4)$، سنحصل على $w_x = -4$، $w_y = 4$، ومنه فإن المستوي المماس هو$w = 4 - 4(x-1) + 4(y-2)$، أو $w = -4x + 4y$.

2B-2.

(a $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{z}$؛ وبالتناظر (بالتبادل بين x و y)، $z_y = \frac{y}{z}$؛ ومنه فإن المستوي المماس هو $z = z_0 + \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) + \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$، أو $z = \frac{x_0}{z_0}x + \frac{y_0}{z_0}y$، حيث $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$.

(b الخط المستقيم هو $x = x_0 t$، $y = y_0 t$، $z = z_0 t$؛ وبتعويض ذلك في معادلات المخروط والمستوي المماس، فإن كلاهما مُحقَّقان لجميع قيم t؛ وهذا يظهر أن الخط المستقيم يقع على كل من المخروط والمستوي المماس (وأيضاً يمكن التأكد من ذلك هندسياً).

2B-3. بجعل x، y، z هي أطوال الساقين والوتر على الترتيب، يصبح لدينا $z = \sqrt{x^2 + y^2}$؛ وهكذا فإن العمليات الحسابية للمشتقات الجزئية هي نفسها كما قمنا بها في 2B-2،

وأيضاً لدينا $\Delta z \approx \frac{3}{5}\Delta x + \frac{4}{5}\Delta y$.

وبأخذ $\Delta x = \Delta y = .01$، فإننا نحصل على $\Delta z = \frac{7}{5}(.01) = .014$.

2B-4. من الصيغة الرياضية، لدينا $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. ومنه فإن:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$$ ، ومن خلال التناظر، $$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2$$.

وبالتعويض بـِ $R_1 = 1$ و $R_2 = 2$ فإن صيغة التقريب تعطي التالي: $\Delta R = \frac{4}{9}\Delta R_1 + \frac{1}{9}\Delta R_2$.

وبالاعتماد على الفرضية، $|\Delta R_i| \le .1$، من أجل $i = 1,2$، لذا:

$$|\Delta R| \le \frac{4}{9}(.1) + \frac{1}{9}(.1) = \frac{5}{9}(.1) \approx .06$$؛ وبالتالي:

$$R = \frac{2}{3} = .67 \pm .06$$

2B-5.

(a لدينا $f(x,y) = (x+y+2)^2$، $f_x = 2(x+y+2)$، $f_y = 2(x+y+2)$. بالتالي، عند $(0,0)$: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 4$، $f(0,0) = 4$؛ والنموذج الخطي هو: $4 + 4x + 4y$؛ وعند $(1,2)$: $f_x(1,2) = f_y(1,2) = 10$، $f(1,2) = 25$؛ والنموذج الخطي هو: $25 + 10(x-1) + 10(y-2)$، أو $10x + 10y - 5$.

(b $f = e^x \cos y$؛ $f_x = e^x \cos y$؛ $f_y = -e^x \sin y$.

النموذج الخطي عند $(0,0)$: $1 + x$؛ والنموذج الخطي عند $(0, \frac{\pi}{2})$ هو: $-y$.

2B-6. لدينا $V = \pi r^2 h$، $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh$؛ $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$؛ $\Delta V \approx \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 \Delta r + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_0 \Delta h$.

وبحساب الجُزْئِيات عند $r = 2$، $h = 3$، فإننا نحصل على:

$$\Delta V \approx 12\pi\Delta r + 4\pi\Delta h$$

وبافتراض وقوع نفس الدقة $|\Delta r| \le \epsilon$، $|\Delta h| \le \epsilon$ لكلا القياسين، فإننا نحصل على:

$|\Delta V| \le 12\pi\epsilon + 4\pi\epsilon$، والذي هو $< .1$ إذا كانت $\epsilon < \frac{1}{160\pi} < .002$.

2B-7. لدينا $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$؛ $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ، $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. ولذلك عند $(3,4)$، فإن $r = 5$، و $\Delta r \approx \frac{3}{5}\Delta x + \frac{4}{5}\Delta y$.

وإذا كان كل من $|\Delta x|$و $|\Delta y|$ أصغر من أو يساوي $.01$ $(\le .01)$، فإن:

$$|\Delta r| \le \frac{3}{5}|\Delta x| + \frac{4}{5}|\Delta y| = \frac{7}{5}(.01) = .014 \ (\text{أو } .02)$$

وبشكل مشابه، $\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$، $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$، لذا عند النقطة $(3,4)$:

$$|\Delta\theta|\le\left|-\frac{4}{25}\Delta x\right|+\left|\frac{3}{25}\Delta y\right|\le\frac{7}{25}(.01)=.0028\ (\text{أو }.003)$$

حيث أنه عند $(3,4)$ يكون لدينا $|r_y|>|r_x|$، r أكثر تأثراً (حساسيةً) للتغيرات في y؛ وبشكل مماثل، θ هي أكثر تأثراً (حساسيةً) لـِ x .

.2B-9

(a $w=x^2(y+1)$؛ $w_x=2x(y+1)=2$ عند $(1,0)$، و $w_y=x^2=1$ عند $(1,0)$؛ لذلك w أكثر تأثراً (حساسيةً) للتغيرات في x حول هذه النقطة.

b) للتقريب من الدرجة الأولى، $\Delta w\approx 2\Delta x+\Delta y$، باستخدام القيم السابقة للمشتقات الجزئية.

إذا أردنا $\Delta w=0$، فإنه بالاعتماد على ما سبق، $2\Delta x+\Delta y=0$، أو $\Delta y/\Delta x=-2$.

2C. التفاضلات؛ التقريبيات

2C-1.

(a $dw = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$ **(b** $dw = 3x^2y^2z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3y^2dz$

(c $dz = \frac{2y\,dx - 2x\,dy}{(x+y)^2}$ **(d** $dw = \frac{t\,du - u\,dt}{t\sqrt{t^2-u^2}}$

2C-2. الحجم هو $V = xyz$، لذا $dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$. ومن أجل $x = 5$، $y = 10$، $z = 20$ يصبح لدينا:

$$\Delta V \approx dV = 200\,dx + 100\,dy + 50\,dz$$

ومنه نرى أن $|\Delta V| \le 350(.1)$، وبالتالي $V = 1000 \pm 35$.

2C-3.

(a $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$. وبالتالي، $dA = \frac{1}{2}(b\sin\theta\,da + a\sin\theta\,db + ab\cos\theta\;d\theta)$.

(b $dA = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{2}\,da + 1\cdot\frac{1}{2}db + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,d\theta\right) = \frac{1}{2}(da + \frac{1}{2}db + \sqrt{3}\,d\theta)$؛
وبالتالي فهي أكثر تأثراً (حساسيةً) بـِ θ، وأقل تأثراً (حساسيةً) بـِ b، حيث أن $d\theta$ و db لهما على الترتيب أكبر وأصغر معاملات.

(c $dA = \frac{1}{2}(.02 + .01 + 1.73(.02) \approx \frac{1}{2}(.065) \approx .03$.

2C-4.

(a $P = \frac{kT}{V}$؛ ومنه فإن $dP = \frac{k}{V}dT - \frac{kT}{V^2}dV$.

(b $V\,dP + P\,dV = k\,dT$ ، ومنه فإن $= \frac{k\,dT - P\,dV}{V}$.

(c بتعويض $P = kT/V$ في (b) فإنها تتحول إلى (a).

.2C-5

(a $-\frac{dw}{w^2} = -\frac{dt}{t^2} - \frac{du}{u^2} - \frac{dv}{v^2}$؛ وبالتالي: $dw = w^2\left(\frac{dt}{t^2} + \frac{du}{u^2} + \frac{dv}{v^2}\right)$.

(b $2u\,du + 4v\,dv + 6w\,dw = 0$؛ وبالتالي: $dw = -\frac{u\,du + 2v\,dv}{3w}$.

2D. التدرج؛ المشتقة الاتجاهية

2D-1.

(a $\nabla f = 3x^2\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j}$؛ $(\nabla f)_P = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$؛ $\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot \frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(b $\nabla w = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{x}{z}\mathbf{j} - \frac{xy}{z^2}\mathbf{k}$؛ $(\nabla w)_P = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$؛

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (\nabla w)_P \cdot \frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{3} = -\frac{1}{3}$$

(c $\nabla z = (\sin y - y\sin x)\mathbf{i} + (x\cos y + \cos x)\mathbf{j}$؛ $(\nabla z)_P = \mathbf{i} + \mathbf{j}$؛

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}}{5} = \frac{1}{5}$$

(d $\nabla w = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{2t+3u}$؛ $(\nabla w)_P = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$، $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot \frac{4\mathbf{i}-3\mathbf{j}}{5} = -\frac{1}{5}$

(e $\nabla f = 2(u + 2v + 3w)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$؛ $(\nabla f)_P = 4(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = 4(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \frac{-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3} = -\frac{4}{3}$$

2D-2.

(a $\nabla w = \frac{3\mathbf{i}-4\mathbf{j}}{3x-4y}$؛ $(\nabla w)_P = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$ لها قيمة قصوى 5 في الاتجاه $\mathbf{u} = \frac{-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}}{5}$،

ولها قيمة صغرى -5 في الاتجاه المعاكس.

$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = 0$ في الاتجاهات $\pm\frac{4\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{5}$.

(b $\nabla w = \langle y + z, x + z, x + y\rangle$؛ $(\nabla w)_P = \langle 1,3,0\rangle$؛ القيمة القصوى لِـ $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}}$ هي $\sqrt{10}$

في الاتجاه $\frac{\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{\sqrt{10}}$؛ والقيمة الصغرى لها هي $-\sqrt{10}$ في الاتجاه $-\frac{\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{\sqrt{10}}$؛ و $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = 0$ في الاتجاهات

$\mathbf{u} = \pm\frac{-3\mathbf{i}+\mathbf{j}+c\mathbf{k}}{\sqrt{10+c^2}}$ (لكل قيم c).

(c $\nabla z = 2\sin(t-u)\cos(t-u)\,(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \sin 2(t-u)(\mathbf{i}-\mathbf{j})$؛ $(\nabla z)_P = \mathbf{i} - \mathbf{j}$؛

القيمة القصوى لـ $\left.\frac{dz}{ds}\right|_{\mathbf{u}}$ هي $\sqrt{2}$ في الاتجاه $\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$، والقيمة الصغرى لها هي $-\sqrt{2}$ في الاتجاه $-\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = 0$ في الاتجاهات $\pm\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

.2D-3

(a $\nabla f = \langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\rangle$؛ $(\nabla f)_P = \langle 4,12,36\rangle$؛ والمتجه المتعامد عند $P\colon\langle 1,3,9\rangle$؛ والمستوي المماس عند P هو: $x + 3y + 9z = 18$.

(b $\nabla f = \langle 2x, 8y, 18z\rangle$؛ المتجه المتعامد عند $P\colon\langle 1,4,9\rangle$، المستوي المماس هو: $x + 4y + 9z = 14$.

(c $(\nabla w)_P = \langle 2x_0, 2y_0, -2z_0\rangle$؛ المستوي المماس:
$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$، أو $x_0x + y_0y - z_0z = 0$،
وذلك بما أن: $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$.

.2D-4

(a $\nabla T = \frac{2x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$؛ $(\nabla T)_P = \frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}}{5}$؛ تتزايد T عند النقطة P بسرعة أكبر في اتجاه $(\nabla T)_P$، والذي هو $\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$.

(b $|\nabla T| = \frac{2}{\sqrt{5}} =$ معدل الزيادة في الاتجاه $\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$. لنطلق على مسافة الانتقال رمز ∇s، بالتالي:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\Delta s = .20 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{.2\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10} \approx .22$$

(c $\left.\frac{dT}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (\nabla T)_P \cdot \mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}}{5}\cdot\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}}$؛

$$\frac{6}{5\sqrt{2}}\Delta s = .12 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{5\sqrt{2}}{6}(.12) \approx (.10)\left(\sqrt{2}\right).14$$

(d في الاتجاهات المتعامدة على التدرج: $\pm\frac{2\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$.

2D-5.

a) خطوط تساوي درجة الحرارة (خط التحارر) = منحنيات المستوى: $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = c$ ، والتي تشكل مجسم القطع الناقص (إهليج).

b) $\nabla T = \langle 2x, 4y, 4z \rangle$؛ $(\nabla T)_P = \langle 2,4,4 \rangle$؛ $|(\nabla T)_P| = 6$؛ وبالنسبة لأسرع انخفاض، استخدم الاتجاه $-(\nabla T)_P$: $\frac{1}{3}\langle 1,2,2 \rangle$.

c) لتكن Δs هي مسافة الانتقال؛ بالتالي $-(\Delta s) = -1.2$؛ $\Delta s \approx .2$.

d) $\left.\frac{dT}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = (\nabla T)_P \cdot \mathbf{u} = \langle 2,4,4 \rangle \cdot \frac{\langle 1,-2,2 \rangle}{3} = \frac{2}{3}$؛ $\frac{2}{3}\Delta s \approx .10 \Leftarrow \Delta s \approx .15$.

2D-6.

$$\nabla uv = \langle (uv)_x, (uv)_y \rangle = \langle uv_x + vu_x, ux_y + vu_y \rangle =$$

$$\langle uv_x, uv_y \rangle + \langle vu_x, vu_y \rangle = u\nabla v + v\nabla u$$

$$\Leftarrow \nabla(uv) \cdot \mathbf{u} = u\nabla v \cdot \mathbf{u} + v\nabla u \cdot \mathbf{u} \Leftarrow \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$

$$\left.\frac{d(uv)}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = u\left.\frac{dv}{ds}\right|_{\mathbf{u}} + v\left.\frac{du}{ds}\right|_{\mathbf{u}}$$

2D-7. عند النقطة P، لتكن $\nabla w = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$، بالتالي:

$$a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 2\sqrt{2}$$

$$a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad a - b = 2\sqrt{2}$$

ثم بطرح وجمع المعادلات على الطرف الأيمن، نحصل على: $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$، $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2D-8. لدينا $P(0,0,0) = 32$؛ ونرغب بأن نقلل هذه القيمة إلى 31.1 عن طريق الانتقال أقل مسافة من نقطة المبدأ **0**، ولتحقيق ذلك يتوجب علينا التحرك باتجاه $-(\nabla P)_0$.

$\nabla P = \langle (y+2)e^z, (x+1)e^z, (x+1)(y+2)e^z \rangle$؛

$(\nabla P)_0 = \langle 2,1,2 \rangle$. $|(\nabla P)_0| = 3$.

وحيث أن $(-3)\cdot(\Delta s) = -.9 \Leftarrow \Delta s = .3$، فإنه يجب علينا أن ننتقل مسافة 3. في الاتجاه $-(\nabla P)_0$. وبما أن $|-\langle 2,1,2 \rangle| = 3$، فإن المسافة 3. ستكون $\frac{1}{10}$ المسافة من $(0,0,0)$ إلى $(-2,-1,-2)$، والذي يقودنا إلى $(-.2,-.1,-.2)$.

2D-9. في هذه المسألة سنستخدم العلاقة $\frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{u}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s}$: انتقلنا في الاتجاه **u** من النقطة المعطاة P إلى أقرب منحنى مستوى C؛ حيث أن Δs هي المسافة المقطوعة (قدّرها باستخدام مسافة الوحدة)، و Δw هي التغير الموافق في w (قدّر قيمته مستخدماً التسميات على منحنيات المستوى).

a) اتجاه ∇f عمودي على منحنى المستوى عند A، من ناحية الزيادة (صعوداً باتجاه أعلى القمة). ومقدار ∇f هو المشتقة الاتجاهية في ذلك الاتجاه: من الصورة، $\frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \frac{1}{.5} = 2$.

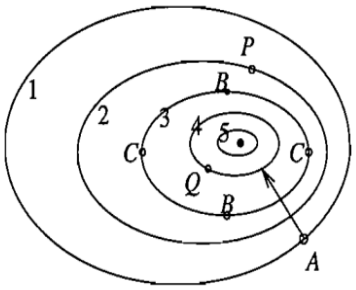
b)، c) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{i}}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{j}}$ ، لذا ستقع B حيث تكون **i** مماسة لمنحنى المستوى، وستقع C حيث تكون **j** مماسة لمنحنى المستوى.

d) عند P: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{i}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s} \approx -\frac{1}{\frac{5}{3}} = -.6$، $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{j}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \frac{-1}{1} = -1$.

e) إذا كانت **u** هي اتجاه $\mathbf{i}+\mathbf{j}$، سيكون لدينا $\frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{u}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \frac{1}{.5} = 2$.

f) إذا كانت **u** هي اتجاه $\mathbf{i}-\mathbf{j}$، سيكون لدينا $\frac{dw}{ds}\Big|_{\mathbf{u}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \frac{-1}{5/4} = -.8$.

g) التدرج يساوي صفراً (معدوم) عند القيمة المحلية القصوى: هنا عند النقطة المشار إليها والتي تعطي موقع قمة التل.



1

2E. قاعدة السلسلة

2E-1.

(a

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}=yz\cdot 1+xz\cdot 2t+xy\cdot 3t^2=t^5+2t^5+3t^5=6t^5 \text{ (i)}$$

$$\frac{dw}{dt}=6t^5 \text{ ؛} w=xyz=t^6 \text{ (ii)}$$

(b

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x(-\sin t)-2y(\cos t)=-4\sin t\cos t \text{ (i)}$$

$$\frac{dw}{dt}=-2\sin 2t \text{ ؛} w=x^2-y^2=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t \text{ (ii)}.$$

(c

$$\frac{dw}{dt}=\frac{2u}{u^2+v^2}(-2\sin t)+\frac{2v}{u^2+v^2}(2\cos t)=-\cos t\sin t+\sin t\cos t=0 \text{ (i)}$$

$$\frac{dw}{dt}=0 \qquad \text{؛w}=\ln(u^2+v^2)=\ln(4\cos^2 t+4\sin^2 t)=\ln 4 \text{ (ii)}$$

2E-2.

a) القيمة $t=0$ متوافقة مع النقطة $P=(1,0)=\big(x(0),y(0)\big)$.

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_0=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_P\left.\frac{dx}{dt}\right|_0+\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_P\left.\frac{dy}{dt}\right|_0=-2\sin t+3\cos t]_0=3$$

b) $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(-\sin t)+x(\cos t)=-\sin^2 t+\cos^2 t=\cos 2t$.

$\frac{dw}{dt}=0$ عندما تكون $2t=\frac{\pi}{2}+n\pi$، وبالتالي عندما تكون $t=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$.

c) $t=1$ متوافقة مع النقطة $(x(1),y(1),z(1))=(1,1,1)$.

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_1=1\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_1-1\cdot\left.\frac{dy}{dt}\right|_1+2\cdot\left.\frac{dz}{dt}\right|_1=1\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot 3=5$$

d) $\frac{df}{dt}=3x^2y\frac{dx}{dt}+(x^3+z)\frac{dy}{dt}+y\frac{dz}{dt}=3t^4\cdot 1+2x^2\cdot 2t+t^2\cdot 3t^2=10t^4$.

2E-3. (a لتكن $w = uv$، حيث $u = u(t)$ ، $v = v(t)$؛ $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$.

(b $\frac{d(uvw)}{dt} = vw\frac{du}{dt} + uw\frac{dv}{dt} + uv\frac{dw}{dt}$؛ $e^{2t}\sin t + 2te^{2t}\sin t + te^{2t}\cos t$

2E-4. القيم $u = 1$ ، $v = 1$ متوافقة مع النقطة $x = 0$ ، $y = 1$. وعند هذه النقطة:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2 \cdot (-2v) + 3 \cdot u = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1$$

2E-5.

(a

$$w_r = w_x x_r + w_y y_r = w_x y_r = w_x \cos\theta + w_y \sin\theta$$

$$w_\theta = w_x w_\theta + w_y y_\theta = w_x(-r\sin\theta) + w_y(r\cos\theta)$$

وبالتالي،

$(w_r)^2 + (w_\theta/r)^2$

=

$(w_x)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (w_y)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2w_x w_y \cos\theta\sin\theta - 2w_x w_y \sin\theta\cos\theta$

$=(w_x)^2 + (w_y)^2$.

(b النقطة $r = \sqrt{2}$، $\theta = 4/\pi$ في الإحداثيات القطبية تتوافق مع النقطة $x = 1$، $y = 1$ في الإحداثيات المستطيلة. وباستخدام معادلات قاعدة السلسلة في الجزء (a)،

$$w_r = w_x \cos\theta + w_y \sin\theta \quad ; \quad w_\theta = w_x(-r\sin\theta) + w_y(r\cos\theta)$$

ولكن بحساب جميع المشتقات الجزئية عند هذه النقطة، سنحصل على:

$$w_r = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{w_\theta}{r} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$(w_r)^2 + \frac{1}{r}(w_\theta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \quad ; \quad (w_x)^2 + \left(w_y\right)^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

2E-6. $w_u = w_x\cdot 2u + w_y\cdot 2v$؛ $w_v = w_x\cdot(-2v) + w_y\cdot 2u$، وهذا باستخدام قاعدة السلسلة.

وبالتالي:

$$(w_u)^2 + (w_v)^2 = \left[4u^2(w_x) + 4v^2\left(w_y\right)^2 + 4uvw_xw_y\right] + \left[4v^2(w_x) + 4u^2\left(w_y\right)^2 - 4uvw_xw_y\right]$$
$$= 4(u^2+v^2)\left[(w_x)^2 + \left(w_y\right)^2\right].$$

2E-7. باستخدام قاعدة السلسلة، $f_u = f_x x_u + f_y y_u$، $f_v = f_x x_v + f_y y_v$؛ ومنه:

$$\langle f_u\ f_v\rangle = \langle f_x\ f_y\rangle \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

2E-8. باستخدام قاعدة السلسلة لدوال بمتغير واحد،

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot -\frac{y}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot\frac{1}{x}$$

وبالتالي:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = f'(u)\cdot -\frac{y}{x} + f'(u)\cdot\frac{y}{x} = 0$$

2F. مسائل القيم العظمى والصغرى

2F-1. في هذه المسألة، استخدم $D = x^2 + y^2 + z^2$ للترميز لمربع المسافة من النقطة (x, y, z) إلى نقطة المبدأ؛ وبالتالي فإن النقطة التي تعطي القيمة الأصغر لـِ D ستعطي أيضاً أصغر قيمة للمسافة الأصلية.

a) بما أن $z^2 = \frac{1}{xy}$، فإننا بالتعويض نحصل على: $D = x^2 + y^2 + \frac{1}{xy}$. وذلك حيث x و y مستقلان؛ وبوضع المشتقات الجزئية مساوية للصفر، نحصل على:

$$D_x = 2x - \frac{1}{x^2 y} = 0 \text{؛} \quad D_y = 2y - \frac{1}{y^2 x} = 0 \text{؛ أو } 2x^2 = \frac{1}{xy} \text{ ، } 2y^2 = \frac{1}{xy}.$$

وبالقيام بالحل، فإننا نرى أن $x^2 = \frac{1}{2xy} = y^2$، ومنه $y = \pm x$.

فإذا كانت $y = x$، فإن $x^4 = \frac{1}{2}$ و $x = y = 2^{-1/4}$، وبالتالي $z = 2^{1/4}$؛ أما إذا كانت $y = -x$، فإن $x^4 = -\frac{1}{2}$ وبالتالي لا توجد أية حلول. وهكذا، فإن النقطة الوحيدة هي $(1/2^{1/4}, 1/2^{1/4}, 2^{1/4})$.

b) باستخدام العلاقة $x^2 = 1 + yz$ للتخلص من x، نحصل على $D = 1 + yz + y^2 + z^2$، حيث أن y و z مستقلان؛ ثم بجعل المشتقات الجزئية مساوية للصفر، يصبح لدينا:

$$D_y = 2y + z = 0 \text{،} \qquad D_z = 2z + y = 0$$

وبالقيام بالحل، نجد أن هذه المعادلة لها الحل $y = z = 0$ فقط؛ وبالتالي $x = \pm 1$، أي توجد نقطتين هما: $(\pm 1, 0, 0)$، وكلاهما على مسافة 1 من نقطة المبدأ.

2F-2. بجعل x هي طول النهايات، y طول الأضلاع، و z تمثل الارتفاع، سيكون لدينا:

المساحة الكلية للكرتونة (للورق المقوى): $A = 3xy + 3xy + 2yz$،

الحجم: $V = xyz = 1$

بالتخلص من z لجعل باقي المتغيرات مستقلة، وبمساواة المشتقات الجزئية بالصفر، نحصل على:

$$A = 3xy + \frac{4}{y} + \frac{2}{x} \text{؛} \quad A_x = 3y - \frac{2}{x^2} = 0 \text{،} \qquad A_y = 3x - \frac{4}{y^2} = 0.$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$y = 2x \quad \Leftarrow \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{y} \quad \Leftarrow \quad 3xy = \frac{4}{y} \quad ،3xy = \frac{2}{x}$$

$$\text{؛ } z = \frac{1}{xy} = \frac{3^{2/3}}{2} = \frac{3}{2 \cdot 3^{1/3}} \text{ ،} y = \frac{2}{3^{1/3}} \text{ ، } x = \frac{1}{3^{1/3}} \quad \Leftarrow \quad 3x^3 = 1 \quad \Leftarrow$$

وبالتالي، فإن أبعاد الصندوق الأكثر اقتصاديةً (توفيراً) هي: $x : y : z = 1 : 2 : \frac{3}{2}$.

2F-5. إن التكلفة هي: $C = xy + xz + 4yz + 4xz$، حيث تمثل الحدود المتتالية هذه كل من: الأرضية، الظهر، الجانبين، والواجهة، على الترتيب. بمعنى آخر، المسألة هي:

تصغير: $C = xy + 5xz + 4yz$، مع مراعاة القيد التالي: $xyz = V = 2.5$.

وبتعويض $z = V/xy$ في C، فإننا نحصل على:

$$C = xy + \frac{5V}{y} + \frac{4V}{x} \text{؛} \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = y - \frac{4V}{x^2} \text{ ،} \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = x - \frac{5V}{y^2}.$$

سنجعل المشتقات الجزئية مساوية للصفر ومن ثم نحل المعادلات الناتجة بشكل مشابه، أي بالتخلص من y؛ وبالتالي سنحصل على $x^3 = \frac{16V}{5} = 8$ (باستخدام $V = 5/2$)، فإن $x = 2$، $y = \frac{5}{2}$، $z = \frac{1}{2}$.

2G. الاستكمال البيني بالمربعات الصغيرة

2G-1. أوجد $y = mx + b$ الأكثر ملائمة للنقاط (1,1)، (2,3)، (3,2).

$$D = (m + b - 1)^2 + (2m + b - 3)^2 + (3m + b - 2)^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial m} = 2(m + b - 1) + 4(2m + b - 3) + 6(3m + b - 2)$$
$$= 2(14m + 6b - 13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 2(m + b - 1) + 2(2m + b - 3) + 2(3m + b - 2)$$
$$= 2(6m + 3b - 6)$$

بالتالي، المعادلات $\frac{\partial D}{\partial m} = 0$ و $\frac{\partial D}{\partial b} = 0$ هي: $\begin{matrix} 14m + 6b = 13 \\ 6m + 3b = 6 \end{matrix}\}$، والتي حلها هو $m = \frac{1}{2}$، $b = 1$ أخيراً، فالخط المستقيم هو $y = \frac{1}{2}x + 1$.

2G-4. $D = \sum_i (a + bx_i + cy_i - z_i)^2$. فتكون المعادلات:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum 2(a + bx_i + cy_i - z_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum 2x_i(a + bx_i + cy_i - z_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial c} = \sum 2y_i(a + bx_i + cy_i - z_i) = 0$$

احذف الرقم 2 من أعلاه؛ فتصبح المعادلات (على الطرف الأيمن، $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$، $1 = [1, \dots, 1]$، الخ...)

$$na + (\sum x_i)b + (\sum y_i)c = \sum z_i$$
أو
$$(\sum x_i)a + (\sum x_i^2)b + (\sum x_i y_i)c = \sum x_i z_i$$
$$(\sum y_i)a + (\sum x_i y_i)b + (\sum y_i^2)c = \sum y_i z_i$$

$$na + (\mathbf{x} \cdot 1)b + (\mathbf{y} \cdot 1)c = \mathbf{z} \cdot 1$$
$$(\mathbf{x} \cdot 1)a + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})b + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})c = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$$
$$(\mathbf{y} \cdot 1)a + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})b + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})c = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

2H. القصوى-الصغرى: معيار المشتقة الثانية؛ المنحنيات ذات الحدود

2H-1.

a) $f_x=0: 2x-y=3$؛ $f_y=0: -x-4y=3$ النقطة الحرجة: $(1,-1)$

$A=f_{xx}=2$؛ $B=f_{xy}=-1$؛ $C=f_{yy}=-4$؛

$AC-B^2=-9<0$، النقطة السرجية (نقطة سنامية).

b) $f_x=0: 6x+y=1$؛ $f_y=0: x+3y=2$ النقطة الحرجة: $(0,1)$

$A=f_{xx}=6$؛ $B=f_{xy}=1$؛ $C=f_{yy}=2$؛

$AC-B^2=11>0$؛ فهي محلية صغرى.

c) $f_x=0: 8x^3-y=0$؛ $f_y=0: 2y-x=0$؛ وبالتخلص من y نحصل على:

$16x^3-y=0$، أو $x(16x^2-1)=0 \Leftarrow x=0$، $x=\frac{1}{4}$، $x=-\frac{1}{4}$، ومنه فإن النقاط الحرجة هي:

$$(0,0)\text{، }(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8})\quad(-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{8})$$

وحيث أن $f_{xx}=24x^2$، $f_{xy}=-1$، $f_{yy}=2$، فإنه بالنسبة للنقاط الثلاثة على التوالي:

$(0,0)$: $\Delta=-1$ (سرج)؛ $(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$: $\Delta=4$ (صغرى)؛ $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$: $\Delta=4$ (صغرى)

d) $f_x=0: 3x^2-3y=0$؛ $f_y=0: -3x+3y^2=0$. والتخلص من y يعطي:

$-x+x^4=0$، أو $x(x^3-1)=0 \Leftarrow x=0$، $y=0$ أو $x=1$، $y=1$.

حيث أن $f_{xx}=6x$، $f_{xy}=-3$، $f_{yy}=6y$، فإنه بالنسبة للنقطتين الحرجتين على التوالي:

$(0,0)$: $AC-B^2=-9$ (سرج)؛ $(1,1)$: $AC-B^2=27$ (صغرى)

e) $f_x=0: 3x^2(y^3+1)=0$؛ $f_y=0: 3y^2(x^3+1)=0$؛ وبحلهما معاً، نحصل من المعادلة الأولى على أنه إما $x=0$ أو $y=-1$؛ وبإيجاد الإحداثي الآخر لكل حالة، فإن ذلك يقود إلى النقطتين الحرجتين $(0,0)$ و $(-1,-1)$.

وحيث أن $f_{xx}=6x(y^3+1)$، $f_{xy}=3x^2\cdot 3y^2$، $f_{yy}=6y(x^3+1)$، فإنه لدينا:

$(-1,-1)$: $AC-B^2=-9$ (سرج)؛ $(0,0)$: $AC-B^2=0$ (فشل الاختبار)

(بدراسة سلوك $f(x,y)$ على المستقيمات $y=mx$، بالنسبة لقيم مختلفة لـِ m، فإنه من الممكن معرفة أن النقطة $(0,0)$ هي النقطة السرجية.)

2H-3. المنطقة R ليس لها أي نقاط حرجة؛ بمعنى أن المعادلات $f_x=0$ و $f_y=0$ هي:

$$2x+2=0\text{، }2y+4=0 \quad \Leftarrow \quad x=-1\text{، }y=-2$$

ولكن هذه النقطة لاتقع في R. لذلك سنقوم بالتحقيق في الحد قطري لـِ R، مستخدمين تحديد الوسطاء (البارامترات) $x=t$، $y=-t$. وبالاقتصار على هذا المستقيم، $f(x,y)$ تصبح دالة في t لوحدها، التي سنرمز لها بـِ $g(x)$، حيث سنبحث عن قيمها الكبرى والصغرى.

$g(t)=f(t,-t)=2t^2-4t-1$؛ $g'(t)=4t-2$، والذي يساوي صفراً عند $t=\frac{1}{2}$.

من الواضح أن هذه النقطة هي الحد الأدنى (الصغرى) لـِ $g(t)$؛ حيث لا توجد لها أي قيم كبرى: $g(t)$ تسعى إلى ∞. وبالتالي، بالنسبة لـِ $f(x,y)$ في R، القيمة الصغرى تحصل عند النقطة $(1/2\,,-1/2)$، ولا توجد لها أي قيم كبرى؛ حيث $f(x,y)$ تسعى إلى مالانهاية (∞) في اتجاهات مختلفة في R.

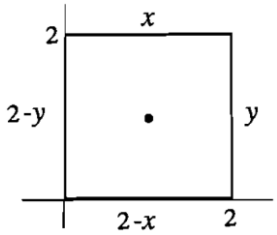
2H-4. لدينا $f_x=y-1$، $f_y=x-1$، لذا النقطة الحرجة الوحيدة ستكون عند $(1,1)$.

a) على كلا طرفي الحد، الدالة $f(x,y)$ تصبح على التوالي:

$$y=0: \quad f(x,y)=-x+2\text{،} \qquad x=0: \quad f(x,y)=-y+2$$

وبما أن الدالة خطية وتتناقص على كلا الطرفين، فإنه ليس لديها نقاط ذات قيمة صغرى (بشكل غير رسمي، النقطة الصغرى هي $-\infty$). وحيث أن $f(1,1)=1$ و $f(x,x)=x^2-2x+2\to\infty$ طالما أن $x\to\infty$ فإن أكبر قيمة لـِ f في الربع الأول هي ∞ ، لذلك فإن النقطة $(1,1)$ يجب أن تكون النقطة السرجية.

b) نتبع نفس النهج المستخدم في (a) لإيجاد النقاط الصغرى والكبرى لـِ $f(x,y)$ على الحدود، على كلا طرفي حدود المربع، الدالة $f(x,y)$ تصبح:



$$y=2: \quad f(x,y)=x \qquad x=2: \quad f(x,y)=y$$

وبما أن $f(x,y)$ تتزايد أو تتناقص على كل من الأضلاع الأربعة، فإن النقاط الكبرى والصغرى في حدود المربع R يمكنها أن تتحقق على نقاط الزوايا الأربعة

فقط؛ وبحساب $f(x,y)$ عند النقاط الأربعة، هذه نجد أن:

$$f(0,0)=2 \quad ;f(2,2)=2 \quad ;f(2,0)=0 \quad ;f(0,2)=0$$

وكما في (a)، بما أن $f(1,1)=1$، فإن النقطة الحرجة يجب أن تكون النقطة السرجية؛ وبالتالي، فإن النقاط الكبرى لِـ f في R: $(0,0)$ و $(2,2)$؛ والنقاط الصغرى: $(2,0)$ و $(0,2)$.

c) لدينا $f_{xx}=0$، $f_{xy}=1$، $f_{yy}=0$ لجميع قيم x وy ؛ ومنه فإن $AC-B^2=-1<0$، لذا $(1,1)$ هي النقطة السرجية، وذلك بمعيار المشتقة الثانية.

2H-5. بما أن $f(x,y)$ هي دالة خطية، فإن لن تحتوي على نقاط حرجة: بمعنى أنه لجميع قيم x وy سيكون لدينا $f_x=1$، $f_y=\sqrt{3}$. لذلك أي قيم صغرى أو كبرى يجب أن تقع ضمن دائرة الحد.

سنقوم بتحديد الوسائط (البارامترات) للدائرة من خلال $x=\cos\theta$، $y=\sin\theta$؛ وبالاقتصار على دائرة الحد هذه، فإن $f(x,y)$ تصبح دالة في θ وحدها، والتي نسميها $g(\theta)$:

$$g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2$$

كما كنا نفعل بالطريقة الاعتيادية لإيجاد القيم الصغرى والكبرى لِـ $g(\theta)$، فإننا نحصل على:

$$g'(\theta)=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0 \quad ،\text{ أو } \quad \tan\theta=\sqrt{3}\ .$$

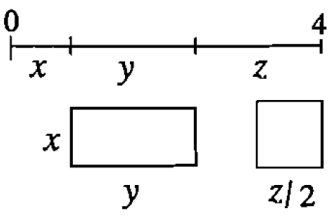
ويترتب على ذلك أن النقطتين الحرجتين لِـ $g(\theta)$ هما $\theta=\frac{\pi}{3}$ و $\theta=\frac{4\pi}{3}$؛ وبحساب g عند هذه النقطتين، نحصل على: $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$ (القيمة الكبرى)، و $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=0$ (القيمة الصغرى).

وهكذا، فإن القيمة الكبرى لِـ $f(x,y)$ في القرص الدائري R تكون عند النقطة $(1/2\ ,\sqrt{3}/2)$، بينما تكون القيمة الصغرى عند $(-1/2\ ,-\sqrt{3}/2)$.

2H-6.

a) بما أن $z=4-x-y$، فإن المسألة هنا هي إيجاد المساحة الكلية الأصغر والأكبر على R:

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{4}(4-x-y)^2$$



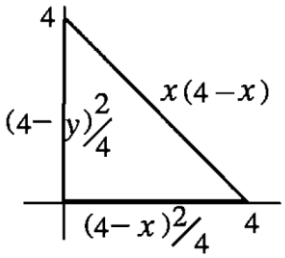
حيث أن R هي المثلث المعطى من خلال R: $x \geq 0$، $y \geq 0$، $x + y \leq 4$.

ولإيجاد النقاط الحرجة لـِ $f(x,y)$، فإن المعادلات $f_x = 0$ و $f_y = 0$ هما على التوالي:

$$y - \frac{1}{2}(4 - x - y) = 0 \quad ؛ \quad x - \frac{1}{2}(4 - x - y) = 0$$

والذي يدل على أن $x = y$، ومنه $x - \frac{1}{2}(4 - 2x)$؛ وبالتالي فإن الحل الوحيد هو: $x = 1$، $y = 1$.

المنطقة R هي مثلث، والذي أضلاعه $f(x,y)$ لها القيم التالية:



القاع: $y = 0$؛ $f = \frac{1}{4}(4 - x)^2$؛ الضلع الأيسر: $x = 0$؛ $f = \frac{1}{4}(4 - y)^2$

القطر: $y = 4 - x$؛ $f = x(4 - x)$.

f تتزايد على كل من القاع والجانب؛ f لها قيمة كبرى على القطر عند $x = 2$، $y = 2$.

لذلك فإننا بحاجة إلى تفحّص النقاط عند الزوايا الثلاثة، إضافةً إلى النقطة $(2,2)$ المرشحة لتكون نقطة عظمى أو صغرى، والنقطة الحرجة $(1,1)$. ومنه نجد أن:

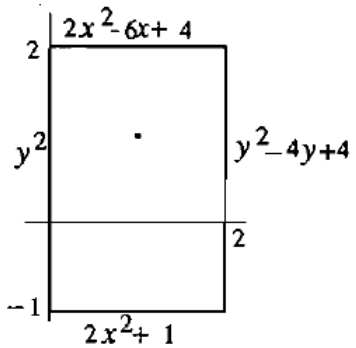
$$f(0,0) = 4 \; ؛ f(4,0) = 0 \; ؛ f(0,4) = 0 \; ؛ f(2,2) = 4 \; ؛ f(1,1) = 2$$

ويترتب على ذلك أن النقطة الحرجة ليست إلا النقطة السرجية؛ وللحصول على أكبر مساحة كلية 4، اجعل $x = y = 0$، $z = 4$، أو $x = y = 2$، $z = 0$، والذي يعطينا نقطة "مستطيل" ومربع الضلع 2؛ أما بالنسبة لأصغر مساحة كلية 0، خذ على سبيل المثال $x = 0$، $y = 4$، $z = 0$، والذي يعطينا مستطيل ذو طول 4 ومساحة 0، ومربع نقطة.

b) لدينا $f_{xx} = \frac{1}{2}$، $f_{xy} = \frac{3}{2}$، $f_{yy} = \frac{1}{2}$ وذلك لكل قيم x و y؛ وبالتالي $AC - B^2 = -2 < 0$، لذا فإن النقطة $(1,1)$ هي النقطة السرجية، باستخدام معيار المشتقة الثانية.

.2H-7

a) $f_x = 4x - 2y - 2$، $f_y = -2x + 2y$؛ وبمساواتها بالصفر ثم حلها بشكل مشابه، نحصل على $x = 1$، $y = 1$، والتي تعتبر النقطة الحرجة الوحيدة.



على الأضلاع الأربعة لحدود المستطيل R، تصبح الدالة $f(x,y)$ كالتالي:

على $y=-1$: $f(x,y)=2x^2+1$؛ على $y=2$: $f(x,y)=2x^2-6x+4$

على $x=0$: $f(x,y)=y^2$؛ على $x=2$: $f(x,y)=y^2-4y+4$

وبالاعتماد على رياضيات المتغير الواحد، $f(x,y)$ تتزايد في القاع وتتناقص على الطرف الأيمن؛ للدالة قيمة صغرى على الطرف الأيسر عند النقطة $(0,0)$، وقيمة صغرى أيضاً على القمة عند النقطة $(\frac{3}{2},2)$. وهكذا، فإن النقاط الصغرى والكبرى التي تقع على حدود المستطيل R، توجد فقط على نقاط الزوايا الأربعة، أو عند $(0,0)$ أو $(\frac{3}{2},2)$. وعند هذه القيم نجد أن:

$$f(0,-1)=1\text{؛ }f(0,2)=4\text{؛ }f(2,-1)=9\text{؛ }f(2,2)=0\text{؛ }f\left(\frac{3}{2},2\right)=-\frac{1}{2}\text{،}$$
$$f(0,0)=0$$

وعند النقطة الحرجة $f(1,1)=-1$ ، وبمقارنتها بما كتب أعلاه، فإنها قيمة صغرى؛ وبالتالي، فإن النقطة العظمى لـِ $f(x,y)$ على R: $(2,-1)$، والنقطة الصغرى لـِ $f(x,y)$ على R: $(1,1)$

b) لدينا $f_{xx}=4$، $f_{xy}=-2$، $f_{yy}=2$ وذلك لكل قيم x و y؛ وبالتالي $AC-B^2>0$ و $A=4>0$، ومنه فإن $(1,1)$ هي نقطة صغرى، وذلك بالاعتماد على معيار المشتقة الثانية.

2I. مضاعفات لاجرانج

2I-1. لتكن $P:(x,y,z)$ هي النقطة، ونريد تكبير (تعظيم) $V=xyz$ في كلا المسألتين، خاضعين للقيد $f(x,y,z)=c$. وتكون معادلات لاجرانج، بالنمط الاتجاهي (شعاعي)، هي:

$$\nabla(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla f(x,y,z)\text{،}\qquad f(x,y,z)=c$$

a) هنا المعادلة $f=c$ هي $x+2y+3z=18$؛ ثم بمساواة المركبات، تصبح معادلات لاجرانج كالتالي:

$$yz=\lambda\text{،}\quad xz=2\lambda\text{،}\quad xy=3\lambda\text{؛}\qquad x+2y+3z=18$$

ولحلها بشكل متماثل، اضرب الأطراف اليسرى بـِ x، y، z على الترتيب، وذلك لتصبح جميعها متساوية؛ وبالتالي ينتج لدينا:

$$\lambda x=2\lambda y=3\lambda z\text{،}\quad \text{أو}\quad x=2y=3z=6\text{،}$$ وذلك بما أن المجموع يساوي 18.

ومنه فإن الجواب الذي حصلنا عليه هو $x=6$، $y=3$، $z=2$. وهو نقطة عظمى، وذلك بما أنه إذا كانت P تقع على الحدود المستطيلة للمنطقة في الثُمن الأول التي تتغير فيه، فإن حجم الصندوق سيساوي صفر.

b) هنا المعادلة $f=c$ هي $x^2+2y^2+4z^2=12$؛ ثم بمساواة المركبات مع بعضها، فإن معادلات لاجرانج تصبح كالتالي:

$$yz=\lambda\cdot 2x\text{،}\quad xz=\lambda\cdot 4y\text{،}\quad xy=\lambda\cdot 8z\text{؛}\qquad x^2+2y^2+4z^2=12.$$

ولحلها بشكل متماثل، اضرب الأطراف اليسرى بـِ x، y، z على الترتيب، وذلك لتصبح جميعها متساوية؛ وبالتالي ينتج لدينا:

$\lambda\cdot 2x^2=\lambda\cdot 4y^2=\lambda\cdot 8z^2$، أو $x^2=2y^2=4z^2=4$، وذلك بما أن المجموع يساوي 12.

ومنه فإن الجواب الذي حصلنا عليه هو $x=2$، $y=\sqrt{2}$، $z=1$. وهذه هي نقطة عظمى، وذلك بما أنه إذا كانت P تقع على الحدود المستطيلة للمنطقة في الثُمن الأول التي تتغير فيه $(1/8$ من مجسم القطع الناقص-اللإهليج)، فإن حجم الصندوق سيساوي صفر.

2I-2. بما أننا نريد تصغير $x^2+y^2+z^2$، وبالخضوع للقيد $x^3y^2z=6\sqrt{3}$، فإن معادلات مضاعف لاجرانج هي:

$$x^3y^2z = 6\sqrt{3} \qquad ؛2z = \lambda \cdot x^3y^2 \quad ، 2y = \lambda \cdot 2x^3yz \quad ،2x = \lambda \cdot 3x^2y^2z$$

ولحلها بشكل متماثل، اضرب المعادلات الثلاث الأولى بـِ x، y، z، ثم اقسمها على 3، 2، 1 على الترتيب؛ مما يجعل الأطراف اليمنى جميعها متساوي، بحيث أنه بعد إزالة 2 من المقامات، فإننا نحصل على:

$$\frac{x^2}{3} = \frac{y^2}{2} = z^2 \text{؛} \qquad \text{وبالتالي } x = z\sqrt{3}، \quad y = z\sqrt{2}.$$

وبتعويض ذلك في $x^3y^2z = 6\sqrt{3}$، نحصل على $3\sqrt{3}z^3 \cdot 2z^2 \cdot z = 6\sqrt{3}$ ، والذي يعطي الجواب التالي:

$$x = \sqrt{3}، y = \sqrt{2}، z = 1.$$

ومن الواضح أنها قيمة صغرى، وذلك بما أنه إذا كانت P بالقرب من أحد المستويات الإحداثية، فإن واحد من المتغيرات سيكون قريباً من الصفر وبالتالي واحد من المتغيرات الأخرى سيكون كبير، حيث أن $x^3y^2z = 6\sqrt{3}$؛ وهكذا فإن P ستكون بعيدةً من نقطة المبدأ.

2I-3. بالرجوع إلى الجواب في 2F-2، سنجعل x هي طول النهايات، y هو طول الأضلاع، z هي الارتفاع، ومن ثم فإن:

المساحة الكلية للكرتونة (للورق المقوى): $A = 3xy + 3xy + 2yz$،

الحجم: $V = xyz = 1$

معادلات مضاعف لاجرانج $\nabla A = \lambda \cdot \nabla(x, y, z)$؛ $xyz = 1$، ثم تصبح:

$$3y + 4z = \lambda yz \text{،} \quad 3x + 2z = \lambda xz \text{،} \quad 4x + 2y = \lambda xy \text{،} \quad xyz = 1.$$

ولحل هذه المعادلات بالنسبة لـِ x، y، z، λ، قم بالتعامل معهم بشكل متماثل. اقسم المعادلة الأولى على yz، وتعامل مع المعادلتين الأخرتين بشكل مشابه، وذلك لنحصل على:

$$3/z + 4/y = \lambda \text{،} \quad 3/z + 2/x = \lambda \text{،} \quad 4/y + 2/x = \lambda \text{،}$$

ثم بطرح المعادلات على شكل أزواج نصل إلى $3/z = 4/y = 2/x$؛ وبجعلها مساوية لـِ k، نحصل على $x = 2/k$، $y = 4/k$، $z = 3/k$، وبالتالي فإن الأبعاد التي تعطي أقل استخدام للورق المقوى هي $x : y : z = 2 : 4 : 3$.

ولإيجاد القيم الفعلية لـ x، y، z، سنجعل $m = 1/k$؛ ثم بالتعويض بذلك في $xyz = 1$ نحصل على $(2m)(4m)(3m) = 1$، ومنه $m^3 = 1/24$ ، $m = 1/2 \cdot 3^{1/3}$، وفي النهاية نحصل على:

$$x = \frac{1}{3^{1/3}} \quad ،y = \frac{2}{3^{1/3}} \quad ،z = \frac{3}{2 \cdot 3^{1/3}}.$$

2I-4. معادلات التكلفة C والحجم V هي $C = xy + 4yz + 6xz$ و $V = .$

ومعادلات مضاعف لاجرانج لكلا المسألتين هي:

(a $yz = \lambda(y + 6z)$ ،$xz = \lambda(x + 4z)$ ،$xy = \lambda(4y + 6x)$؛

$$xy + 4yz + 6xz = 72$$

(b $y + 6z = \mu \cdot yz$ ،$x + 4z = \mu \cdot xz$ ،$4y + 6x = \mu \cdot xy$؛ $xyz = 24$

المعادلات الثلاثة الأولى هي نفسها في كلتا الحالتين، طالما أنه يمكننا وضع $\mu = 1/\lambda$. وبحل المعادلات الثلاث الأولى في (a) بشكل متماثل، حيث نضرب المعادلات بـِ x، y، z على الترتيب، مما يجعل الأطراف اليسرى متساوية؛ ومنه فإن الأطراف اليمنى متساوية، وبسبب ذلك فإننا نحصل بعد إلغاء λ على:

$xy + 6z = xy + 4yz = 4yz + 6xz$، والذي يؤدي إلى $xy = 4yz = 6xz$.

(a حيث أن مجموع المضروبات الثلاثة المتساوية يساوي 72، بالاعتماد على الفرضية، فإننا نحصل على:

$$xy = 24 \quad ،yz = 6 \quad ،xz = 4$$

ومن أول معادلتين يكون لدينا $x = 4z$، من المعادلة الأولى والثالثة يكون لدينا $y = 6z$، وهذا يوصلنا إلى أن الجواب هو $x = 4$، $y = 6$، $z = 1$.

(b قسمة $xy = 4yz = 6xz$ على xyz، ومن ثم القيام بالضرب التقاطعي، يقودنا إلى أن $x = 4z$، $y = 6z$؛ وبما أنه وبالاعتماد على الفرضية، $xyz = 24$، فإنه مرة أخرى يقودنا إلى أن الحل هو $x = 4$، $y = 6$، $z = 1$.

2J. المتغيرات غير المستقلة

2J-1.

a) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ تعني أن x هي المتغير الغير مستقل (التابع)؛ ويتم التخلص من ذلك بكتابة:

$w = (z-y)^2 + y^2 + z^2 = z + z^2$. والذي يظهر أن $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = 0$.

b) لحساب $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$، ومرة أخرى حيث x هي المتغير الغير مستقل (التابع)؛ فكما في الجزء (a)، لدينا هنا $w = z + z^2$ وبالتالي $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = 1 + 2z$.

2J-2.

a) باشتقاق $z = x^2 + y^2$ بالنسبة لِـ y، فإن: $0 = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + 2y$؛ لذا $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{y}{x}$؛

وبالاعتماد على قاعدة السلسلة، $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + 2y = 2x\left(-\frac{y}{x}\right) + 2y = 0$.

وباشتقاق $z = x^2 + y^2$ بالنسبة لِـ z، فإن: $1 = 22x\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$؛ لذا $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{1}{2x}$؛ وبالاعتماد على قاعدة السلسلة، $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + 2z = 1 + 2z$.

b) باستخدام التفاضل، $dw = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$، $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$؛ وحيث أن y و z هي المتغيرات المستقلة، فسنزيل dx من خلال طرح المعادلة الثانية من الأولى، وهذا يعطينا $dw = 0\,dy + (1+2z)dz$؛

وبالتالي بالرجوع إلى ملحق المحاضرة 2، D2، نحصل على: $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = 0$، $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = 1 + 2z$.

2J-3.

a) لحساب $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$، نجد أن y هي المتغير الغير مستقل(التابع)؛ وبحلها، نحصل على: $y = \frac{zt}{x}$؛

وباستخدام قاعدة السلسلة، $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z} = x^3\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x,z} - z^2 = x^3\frac{z}{x} - z^2 = x^2z - z^2$.

b) بطريقة مشابهة، $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$ تعني أن t هي المتغير الغير مستقل (التابع)، وحيث أن $t = \frac{xy}{z}$، فإنه لدينا وبالاعتماد على قاعدة السلسلة :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} = -2zt - z^2\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_{x,y} = -2z - z^2 \cdot -\frac{xy}{z^2} = -zt.$$

2J-4. تم حساب التفاضلات في المعادلة (4).

a) حيث أن x، z، t متغيرات مستقلة، سنقوم بالتخلص من dy من خلال حل المعادلة الثانية بالنسبة لِـ $x\,dy$، وبتعويض ذلك في المعادلة الأولى، ومن ثم تجميع الحدود، نحصل على:

$dw = 2x^2y\,dx + (x^2z - z^2)dt + (x^2t - 2zt)dz$، والذي يظهر بالرجوع إلى ملحق المحاضرة 2، D2 أن $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z} = x^2z - z^2$.

b) حيث أن x، y، z متغيرات مستقلة، سنقوم بالتخلص من dt من خلال حل المعادلة الثانية بالنسبة لِـ $z\,dt$، وبتعويض ذلك في المعادلة الأولى، ومن ثم تجميع الحدود، نحصل على:

$dw = (3x^2y - zy) + (x^3 - zx)dy - zt\,dz$، والذي يظهر بالرجوع إلى ملحق المحاضرة 2، D2 أن: $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} = -zt$.

2J-5.

a) إذا كانت $pv = nRT$، فإن: $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_v = S_p + S_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = S_p + S_T \cdot \frac{v}{nR}$.

b) وبشكل مشابه، لدينا $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v = S_T + S_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = S_T + S_p \cdot \frac{nR}{v}$.

2J-6.

a) $\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x = 3u^2 - v^2 - u \cdot 2v\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_x = 3u^2 - v^2 - 2uv$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u = -u \cdot 2v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u = -2uv$$

(b $dw = (3u^2 - v^2)du - 2uv\,dv$؛ $du = x\,dy + y\,dx$؛ $dv = du + dx$؛

وبالنسبة لكلا التفاضلين (الاشتقاقين)، u و v هما متغيران مستقلان، لذا بحذف dv، نحصل على:

$$dw = (3u^2 - v^2)du - 2uv(du + dx) = (3u^2 - v^2 - 2uv)du - 2uv\,dx$$

والتي معاملاتها تبعاً لملحق المحاضرة 2، D2 هي $\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x$ و $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u$.

2J-7. بما أننا نريد معرفة كلا المشتقتين من أجل التدرج، سنستخدم التفاضلات.

$df = 2\,dx + dy - 3dz$ عند P؛ $dz = 2x\,dx + dy = 2\,dx + dy$ عند P؛

ونجد أن المتغيرات المستقلة هي x و z، لذا سنحذف dy، وبالتالي نحصل على:

$df = 0\,dx - 2\,dz$ عند النقطة $(x, z) = (1,1)$. لذا $\nabla g = \langle 0, -2\rangle$ عند $(1,1)$.

2J-8. لحساب $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta$، لاحظ أن r و θ هما متغيران مستقلان. لذلك:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta.$$

والآن، $x = r\cos\theta$ لذا $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta$. وبالتالي:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \cos\theta = \frac{r - x\cos\theta}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{r - r\cos^2\theta}{r|\sin\theta|} = \frac{r\sin^2\theta}{r|\sin\theta|} = |\sin\theta|$$

2K. المعادلات التفاضلية الجزئية

2K-1. $w = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. وإذا كانت $(x, y) \neq (0,0)$، فإن:

$$w_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(w_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$w_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(w_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

وبالتالي فإن w تحقق معادلة لابلاس ثنائية البعد، $w_{xx} + w_{yy} = 0$؛ حيث استثنينا من ذلك النقطة $(0,0)$ وذلك بما أن $\ln 0$ غير معرّف.

2K-2.

إذا كانت $w = (x^2 + y^2 + z^2)$،

فإن $\frac{\partial}{\partial x}(w_x) = \frac{\partial}{\partial x}(2x \cdot n(x^2 + y^2 + z^2)^{n-1})$

$$= 2n(x^2 + y^2 + z^2)^{n-1} + 4x^2 n(n-1)(x^2 + y^2 + z^2)^{n-2}$$

ونحصل على w_{yy} و w_{xx} من خلال التناظر؛ ونحصل من الإضافة والتجميع على:

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 6n(x^2 + y^2 + z^2)^{n-1} + 4(x^2 + y^2 + z^2)n(n-1)(x^2 + y^2 + z^2)^{n-2}$$

$$= 2n(2n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{n-1}$$

والذي يساوي صفراً إذا كانت $n = 0$، أو إذا كانت $n = -1/2$.

2K-3.

(a $w = ax^2 + bxy + cy^2$؛ $w_{xx} = 2a$، $w_{yy} = 2c$.

$w_{xx} + w_{yy} = 0 \Leftarrow 2a + 2c = 0$ أو $c = -a$.

وبالتالي فإن جميع عديدات الحدود من الدرجة الثانية التي تُحقق معادلة لابلاس هي على الشكل الآتي:

$$ax^2 + bxy - ay^2 = a(x^2 - y^2) + bxy \text{ ؛}$$

أي أن التركيبات الخطية لكثيرتي حدود $f(x,y)=x^2-y^2$ و $g(x,y)=xy$.

2K-4. معادلة الموجة في بعد واحد هي $w_{xx}=\frac{1}{c^2}w_{tt}$. لذا:

$$w=f(x+ct)+g(x-ct) \quad \Rightarrow \quad w_{xx}=f''(x+ct)+g''(x-ct)$$
$$\Rightarrow \quad w_t=cf''(x+ct)+-cg''(x-ct)$$
$$\Rightarrow \quad w_{tt}=c^2f''(x+ct)+c^2g''(x-ct)=c^2w_{xx}$$

والذي يُظهر أن w تُحقق معادلة الموجة.

2K-5. معادلة الحرارة في بعد واحد هي $w_{xx}=\frac{1}{\alpha^2}w_t$. لذا إذا كانت $w(x,t)=\sin kxe^rt$، فإن:

$$w_{xx}=e^{rt}\cdot k^2(-\sin kx)=-k^2w$$
$$w_t=re^{rt}\sin kx=rw$$

وبالتالي، فيجب أن يكون لدينا $-k^2w=\frac{1}{\alpha^2}rw$ ، أو $r=-\alpha^2k^2$.

غير أنه من الشرط الإضافي الذي ينص على أن $w=0$ عند $x=1$، فيجب أن يكون لدينا:

$$sin\ k\ e^{rt}=0\ ;$$

وبالتالي $\sin k=0$، ومنه $k=n\pi$، حيث n هي عدد صحيح.

ولرؤية ماذا يحدث لِـ w عندما $t\to\infty$، فإننا نلاحظ أنه طالما $|\sin kx|\le 1$، فإن:

$$|w|=e^{rt}|\sin kx|\le e^{rt}$$

أما الآن، إذا كانت $k\neq 0$، فإن $r=-\alpha^2k^2$ سالبة و $e^{rt}\to 0$ كما $t\to\infty$؛ لذلك $|w|\to 0$.

وهكذا، فإن w ستكون حل يُحقق شروط الجانب المعطى وذلك إذا كانت $k=n\pi$، حيث n هي عدد صحيح غير الصفر، و $r=-\alpha^2k^2$.