3. التكامل المزدوج

3A. التكامل المزدوج في الاحداثيات الديكارتية

1-3A أحسب كل من التكاملات المتتابعة التالية

$(a \quad \int_0^2 \int_{-1}^1 \left(6x^2+2y\right)dydx \qquad (b \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \left(u\sin t + t\cos u\right)dtdu$

$(c \quad \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x} 2x^2 ydydx \qquad (d \quad \int_0^1 \int_0^u \sqrt{u^2+4}dvdu$

2-3A عبّر عن كل تكامل مزدوج على المنطقة R على أنه تكامل متتابع، وذلك باستعمال ترتيب التكامل المعطى. استعمل الطريقة الموضّحة في الملحق I للتزود بحدود التكامل. بالنسبة إلى البعض منهم، يكون من اللازم تجزئة التكامل إلى قسمين. في كل حالة، إبدء برسم المنطقة.

$(a$ R عبارة عن مثلث رؤوسه عند المبدأ، $(0,2)$، و $(-2,2)$.

عبّر عما يلي على شكل تكامل متتابع: $(i \quad \int\int_R dydx \qquad (ii \quad \int\int_R dxdy$

$(b$ R عبارة عن منطقة محدودة بين القطع المكافئ $y=2x-x^2$ و المحور x.

عبّر عما يلي على شكل تكامل متتابع: $(i \quad \int\int_R dydx \qquad (ii \quad \int\int_R dxdy$

$(c$ R عبارة عن مقطع دائرة مركزها في المبدأ ونصف قطرها 2 ويقع بين المحور x والمستقيم $y=x$.

عبّر عما يلي على شكل تكامل متتابع: $(i \quad \int\int_R dydx \qquad (ii \quad \int\int_R dxdy$

$(d*$ R هو منطقة محدودة تقع بين القطع المكافئ $y^2=x$ والمستقيم المار من خلال $(2,0)$ وله ميل يساوي 1.

عبّر عما يلي على شكل تكامل متتابع: $(i$ $\int\int_R dydx$ $(ii$ $\int\int_R dxdy$

3-3A أحسب كل من التكاملات المزدوجة التالية على المنطقة المعطاة R. اختر أي ترتيب هو أسهل للتكاملات– سيكون اختيارك متأثر بالمتكاملات، وبشكل R.

$(a$ $\int\int_R xdA$؛ R هي المنطقة المحدودة بالمحاور و $2y+x=2$

$(b$ $\int\int_R (2x+y^2)dA$؛ R هي المنطقة المحدودة في الربع الأول المحدود بالمحاور و $y^2=1-x$؛ (dx dy هو الأسهل).

$(c$ $\int\int_R ydA$؛ R هو المثلث ذو الرؤوس عند $(\pm 1,0)$، $(0,1)$.

4-3A أوجد عن طريق التكامل المزدوج حجم الأجسام الصلبة التالية:

$a)$ الجسم الصلب الواقع تحت $z=\sin^2 x$ وفوق المنطقة R المحدودة من الأسفل بالمحور x ومن الأعلى بالقوس المركزي لمنحنى $\cos x$

$b)$ الجسم الصلب الواقع على المنطقة المحدودة R في المربع الأول بين المنحنى x و x^2، وتحت $z=yx$.

$c)$ الجسم الصلب الواقع تحت x^2-y^2، وفوق المستوي xy، وبين المستويات $x=0$ و $x=1$

5-3A أحسب كل من التكاملات المتتابعة التالية، بتغيير ترتيب التكامل (إبدأ بمعرفة ماهية المنطقة R، وقم برسم مخططها).

$(a$ $\int_0^2\int_x^2 e^{-y^2}dydx$ $(b$ $\int_0^{1/4}\int_{\sqrt{t}}^{1/2}\frac{e^u}{u}dtdt$ $(c$ $\int_0^1\int_{x^{1/3}}^1\frac{1}{1+u^4}dudx$

6-3A كل تكامل أدناه هو على قرص يتألف من داخل المنطقة R لدائرة الوحدة، المتمركزة في المبدأ. بالنسبة إلى كل تكامل، استعمل تناظرات R والمتكاملات

(*i*) لتحديد إذا ما كانت قيمته صفراً، أو ما إذا كانت قيمته غير معدومة.

(*ii*) لإيجاد تكامل مزدوج الذي يكون مكافئاً (أي، له نفس القيمة)، لكن يكون له مكاملات أبسط و/أو يكون مأخوذاً على الربع الأول (إذا كان ممكناً)، أو على نصف القرص. (لا تقم بحساب التكامل.)

$$\int\int_R xydA \text{ ؛ } \int\int_R (x^2+y)dA \text{ ؛ } \int\int_R x^2 ydA \text{ ؛ } \int\int_R x^2 dA \text{ ؛ } \int\int_R e^x dA \text{ ؛ } \int_R xdA$$

3A-7 باستعمال عدم المساواة $f \le g$ على $\int\int_R fdA \le \int\int_R gdA \Rightarrow R$ ، بين أنَّ التقييمات التالية صحيحة:

(*a* مساحة المنطقة $R \le \int\int_R \frac{dA}{1+x^4+y^4}$

(*b* R هي المربع $0 \le x, y \le 1$ $\int\int_R \frac{xdA}{1+x^2+y^2} < .35,$

3B. التكامل المزدوج في الإحداثيات القطبية

في تقييم التكاملات، تكون التكاملات المحدودة التالية عملية:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{nxdx}=\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot n}\dfrac{\pi}{2} & \text{إذا كان } n \text{ تكاملا زوجياً} \geq 2\\ \dfrac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot n} & \text{إذا كان } n \text{ تكاملا فردياً} \geq 3\end{cases}$$

على سبيل المثال: $\int_0^{\pi/2}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{\pi/2}\sin^3 xdx=\frac{2}{3}$ ، $\int_0^{\pi/2}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}$ ،

بالمثل إذا استبدلنا $\sin x$ بـ $\cos x$.

1-3B عبِّر عن كل تكامل مزدوج على المنطقة R على أنه تكامل متتابع في الإحداثيات القطبية. استعمل الطريقة الموضحة في الملحق I للتزويد بحدود التكامل. بالنسبة إلى البعض منهم، يكون من اللازم تجزئة التكامل إلى جزئين. في كل حالة، ابدأ بتخطيط المنطقة.

a) المنطقة الواقعة على يمين الدائرة المتمركزة في المبدأ ونصف قطرها 2. وإلى يسار الخط المستقيم العمودي المار من خلال $(-1,0)$.

b) * الدائرة التي نصف قطرها 1، و مركزها عند $(0,1)$.

c) المنطقة داخل الشكل القلبي $r=1-\cos\theta$ وخارج الدائرة التي نصف قطرها $3/2$ والمتركزة في المبدأ.

d) المنطقة المحدودة بالمحور y، المستقيم $y=a$، وربع الدائرة التي نصف قطرها a والمتركزة في $(a,0)$.

2-3B أحسب بالتتابع التكاملات المزدوجة على المناطق المبينة. استعمل الإحداثيات القطبية.

(a $\int\int_R \frac{dA}{r}$؛ R هي المنطقة داخل الربع الأول للحلقة $r=\sin 2\theta$.

(b $\int\int_R \frac{xdA}{1+x^2+y^2}$؛ R هي المنطقة داخل الربع الأول لـ $x^2+y^2=a^2$.

(c $\int\int_R \tan^2\theta dA$؛ R هي المثلث ذي الرؤوس عند $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$.

(d $\int\int_R \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$؛ R هو نصف القرص الأيمن ذو نصف القطر $\frac{1}{2}$ المتمركز عند $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3-3B أوجد حجوم المجالات التالية بالتكامل باستعمال الاحداثيات القطبية:

a) الجسم الصلب ذو شكل نصف كرة نصف قطرها a
(ضعها بحيث تغطي قاعدتها الدائرة $x^2+y^2=a^2$)

b) المجال تحت المنحنى xy وفوق المنطقة R لربع القرص للسؤال 3B-2b.

c) في المجال الواقع تحت المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ وعلى الدائرة التي نصف قطرها واحد والمتمركزة في $(0,1)$

d) المجال الواقع تحت الجسم المكافئ الدوراني $z=x^2+y^2$ وعلى داخل يمين الحلقة $r^2=\cos\theta$.

4-3B* يتسائل الطلاب في بعض الأحيان إذا كان بالإمكان القيام بالتكامل المزدوج في الإحداثيات القطبية والمتتابع بالترتيب العكسي: $\int\int_R d\theta dr$. بالرغم من أنه غير شائع، فقط من أجل رؤية ما إذا كان بإمكانك في هذه الحالة من وضع حدود التكامل، حاول إيجاد حدود التكامل للتكامل على المنطقة المحدودة أعلاه بالمستقيمين $x=1$ و $y=1$، ومن الأسفل بربع الدائرة ذات نصف القطر 1 والمتمركزة في المبدأ.

3C. تطبيقات التكامل المزدوج

1-C3 ليكن R مثلث قائم، طول ساقيه a، و كثافته 1. أوجد ما يلي (يمكن استنباط (b) و (c) من (a) بدون المزيد من حسابات)

$(a$ عزم عطالته حول الساق؛

$(b$ عزم عطالته القطبي حول الزاوية القائمة؛

$(c$ عزم عطالته حول الوتر.

2-C3 أوجد مركز الكتلة للمنطقة داخل قوس واحد من $\sin x$،

إذا كان:

$(a$ $\delta = 1$ $(b$ $\delta = y$

3-C3 D هو قطر القرص الذي نصف قطره a، و C هو الوتر الموازي لـ D الذي يبعد عنه بـ c. C تقسّم القرص إلى قطعتين؛ ليكن R أصغرهما. بافتراض أنَّ $\delta = 1$، أوجد عزم R حول D، بإعطاء الإجابة بالشكل المبسط، واستعمال

(a) الإحداثيات المستطيلة؛ (b) الإحداثيات القطبية

4-C3 أوجد مركز الجاذبية لمقطع القرص الدائري ذو نصف القطر a، الذي زاوية رأسه هي 2α. اعتبر $\delta = 1$.

5-C3 أوجد عزم العطالة القطبي لحلقة واحدة لـ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول المبدأ. اعتبر $\delta = 1$.

3D. تغيير المتغير في العديد من التكاملات

1-3D أحسب $\int\int_R \frac{x-3y}{2x+y}dxdy$ ،

حيث R هو متوازي الأضلاع المحدود في أحد الجوانب بـ $y=-2x+1$ و $y=-2x+4$ ، ومن فوق ومن الأسفل بـ $y=x/3$ و $y=(x-7)/3$.

استعمل تغيير المتغيرات $u=x-3y$ ، $v=2x+y$.

2-3D أحسب $\int\int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ بتغيير المتغيرات المستعملة في المثال 2؛ خذ كمنطقة R المثلث ذو الرؤوس عند المبدأ، $(2,0)$ و $(1,1)$.

3-3D أوجد الحجم تحت المساحة $z=16-x^2-4y^2$ وفوق المستوي yx ؛ قم بتبسيط التكامل بتغيير المتغيرات $u=x$ ، $v=2y$.

4-3D أحسب $\int\int_R (2x-3y)^2(x+y)^2\,dxdy$ ،

حيث R المثلث المحدود بالجهة الموجبة للمحور x ، الجهة السالبة للمحور y ، والمستقيم $2x-3y=4$ ، بتغيير المتغيرات $u=x+y$ ، $v=2x-3y$.

5-3D قم بالتكامل المتتابع من اجل عزم العطالة القطبي للمنطقة "المثلثية" المنتهية والمحدودة بالمستقيمات $y=x$ و $y=2x$ ، وقطعة من القطع المكافئ $xy=3$. استعمل تغيير الإحداثيات الذي يجعل من الحدود المنحنية نظاماً جديداً للإحداثيات.

بالنسبة للمسائل التالية، فإن المراجع المرقمة للصيغ، المعادلات، والأمثلة كلها ترجع للملحق CV **للمحاضرة 18.**

6-3D* تحقق من أنَّ (25) تعطي الحجم العنصري الصحيح في الإحداثيات الكروية، باستعمال المعادلات (26).

7-3D* باستعمال تغيير الإحداثيات $u = xy$، $v = y/x$، قم بالتكامل المتتابع من أجل عزم العطالة القطبي للمنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $xy = 1$، المحور x، والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$. اختر ترتيب التكامل الذي يجعل حدود التكاملات مبسطة.

8-3D بالنسبة إلى تغيير الإحداثيات في 3D – 7، أعط المعادلات uv للمنحنيات التالية:

$$(a \quad y = x^2 \qquad\qquad (b \quad x^2 + y^2 = 1$$

9-3D* أثبت العلاقة (22) بين Jacobians: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$؛

استعمل قاعدة السلاسل للاشتقاق الجزئي، وقاعدة ضرب المحددات: $|AB| = |A||B|$، حيث A و B هما مصفوفات مربعة ذات نفس البعد.

10-3D* قم بالتكامل المتتابع بالترتيب $\int\int_R dvdu$ بالنسبة إلى المنطقة في المثال 4 في الملحق CV للمحاضرة 18، وتحقق من عملك بحسابه. (يتوجب عليك تجزئة المنطقة إلى قطعتين، باستعمال حدود التكامل للقطعتين.)

3. التكامل المزدوج (الحل)

1-3A

(a داخلي: $6x^2y+y^2\Big]_{y=-1}^{1}=12x^2;$ خارجي: $4x^3\Big]_0^2=32$.

(b داخلي: $-u\cos t+\frac{1}{2}t^2\cos u\Big]_{t=0}^{\pi}=2u+\frac{1}{2}\pi^2\cos u$

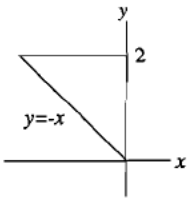
خارجي: $u^2+\frac{1}{2}\pi^2\sin u\Big]_0^{\pi/2}=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2+\frac{1}{2}\pi^2=\frac{3}{4}\pi^2$

(c داخلي: $x^2y^2\Big]_{\sqrt{x}}^{x^2}=x^6-x^3$ خارجي: $\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^1=\frac{1}{7}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{28}$

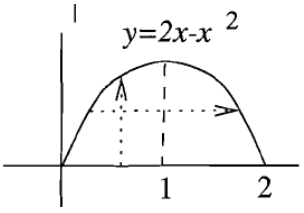
(d داخلي: $v\sqrt{u^2+4}\Big]_0^u=u\sqrt{u^2+4}$ خارجي: $\frac{1}{3}\left(u^2+4\right)^{3/2}\Big]_0^1=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)$

2-3A

(a $(i)\iint_R dydx=\int_{-2}^{0}\int_{-x}^{2}dydx$ $(ii)\iint_R dxdy=\int_0^2\int_{-y}^{0}dxdy$



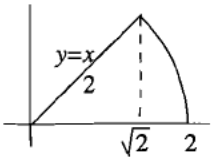
(b i) حدود R توجد عند 0 و 2، بما أنَّ $2x-x^2=0$ لها 0 و 2 كجذور.



$$\iint_R dydx=\int_0^2\int_2^{2x-x^2}dydx$$

ii) نقوم بحل $y=2x-x^2$ من أجل x بدلالة y : نكتب المعادلة على الشكل $x^2-2x+y=0$ ونحل من أجل x بالصيغة التربيعية، نحصل على $x=1\pm\sqrt{1-y}$. لاحظ أنَّ النقطة القصوى للمنحنى هي (1,1) (تقع في منتصف المسافة بين الجذرين 0و 2). نحصل على:

$$\int\int_R dxdy=\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}}dxdy$$



$$\int\int_R dydx=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{x}dydx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dydx \qquad (i \qquad (c$$

$$\int\int_R dxdy=\int_0^{2}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}dxdy \qquad (ii$$

d) تلميح: أولاً يجب عليك إيجاد النقاط تقاطع المنحنيين، وذلك بحل $y^2=x$ و $y=x-2$ (حذف x) معاً.

التكامل $\int\int_R dydx$ يتطلب قطعتين؛ $\int\int_R dxdy$ فقط واحدة.

3-3A

$$\int\int_R dA=\int_0^2\int_0^{1-x/2}xdydx \qquad (a$$

داخلي: $x\left(1-\frac{1}{2}x\right)$ خارجي: $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\Big]_0^2=\frac{4}{2}-\frac{8}{6}=\frac{2}{3}$

$$\int\int_R\left(2x+y^2\right)dA=\int_0^1\int_0^{1-y^2}\left(2x+y^2\right)dxdy \qquad (b$$

داخلي: $x^2+y^2x\Big]_0^{1-y^2}=1-y^2$ خارجي: $y-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}$

$$\int\int_R ydA=\int_0^1\int_{y-1}^{1-y}ydxdy \qquad (c$$

داخلي: $xy\Big]_{y-1}^{1-y} = y[(1-y)-(y-1)] = 2y-2y^2$ خارجي: $y^2 - \frac{2}{3}y^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

4-3A

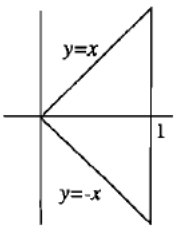
(a $\int\int_R \sin^2 x dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos x} \sin^2 x dy dx$

داخلي: $y\sin^2 x\Big]_0^{\cos x} = \cos x \sin^2 x$ داخلي: $\frac{1}{3}\sin^3 x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-(-1)) = \frac{2}{3}$

(b $\int\int_R xy dA = \int_0^1\int_{x^2}^{x}(dydx)$

داخلي: $\frac{1}{2}xy^2\Big]_{x^2}^{x} = \frac{1}{2}(x^3 - x^5)$ داخلي: $\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24}$

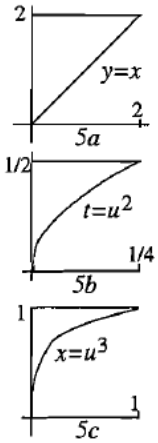
(c الدالة $x^2 - y^2$ معدومة في المستقيمات $y=0$ و $y=-x$ و موجبة في المنطقة R المبينة، الواقعة بين $x=0$ و $x=1$. و بالتالي:



الحجم $= \int\int_R (x^2 - y^2)dA = \int_0^1\int_{-x}^{x}(x^2 - y^2)dydx$

داخلي: $x^2 y - \frac{1}{3}y^3\Big]_{-x}^{x} = \frac{4}{3}x^3$ خارجي: $\frac{1}{3}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

5-3A



(a $\int_0^2\int_x^2 e^{-y^2}dydx = \int_0^2\int_0^y e^{-y^2}dxdy = \int_0^2 e^{-y^2}ydy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big]_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4})$

(b $\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\sqrt{t}}^{1/2}\frac{e^u}{u}dudt = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{u^2}\frac{e^u}{u}dtdu = \int_0^{\frac{1}{2}}ue^u du = (u-1)e^u\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

(c

$$\int_0^1\int_{x^{1/3}}^1 \frac{1}{1+u^4}dudx = \int_0^1\int_0^{u^3} \frac{1}{1+u^4}dxdu = \int_0^1 \frac{u^3}{1+u^4}du = \frac{1}{4}\ln\left(1+u^4\right)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}$$

6-3A

(a ؛ 0 $2\int\int_S dA$ S=النصف الأيمن لـ R ؛ $4\int\int_Q x^2dA$, Q=المربع الأول

$4\int\int_Q x^2dA$ ؛ 0 0

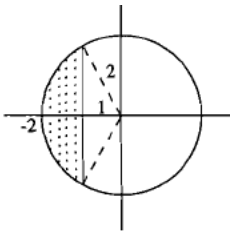
7-3A

(a $x^4+y^4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq 1$

$$\int\int_R \frac{xdA}{1+x^2+y^2} \leq \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dxdy = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} < \frac{7}{2}$$

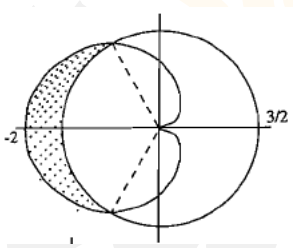
3B. التكامل المزدوج في الإحداثيات القطبية

1-3B



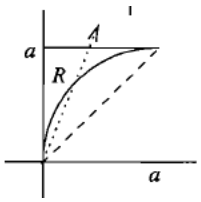
a) في الاحداثيات القطبية، المستقيم $x=-1$ يصبح $r\cos\theta=-1$، أو $r=-\sec\theta$. نحن أيضاً بحاجة إلى الزاوية القطبية لتقاطع النقاط؛ بما أنَّ المثلث القائم هو مثلث ذي زوايا $90-60-30$ (لديه أحد الساقين 1 و الوتر 2)، الحدود تكون (بدون مكاملات)

$$\int\int_R drd\theta=\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\int_{-\sec\theta}^{2} drd\theta$$



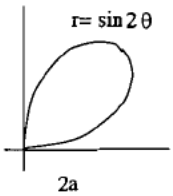
c) نحن بحاجة إلى الزاوية القطبية لتقاطع النقاط. لإيجادها، نقوم بحل المعادلتين $r=\frac{3}{2}$ و $r=1-\cos\theta$ في آن واحد. بحذف r، نحصل على $\frac{3}{2}=1-\cos\theta$، ومنه $\theta=2\pi/3$ و $4\pi/3$. و منه تكون الحدود (بدون مكاملات)

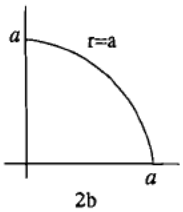
$$\int\int_R drd\theta=\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\int_{3/2}^{1-\cos\theta} drd\theta$$

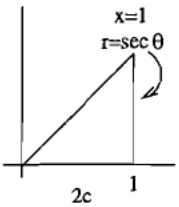


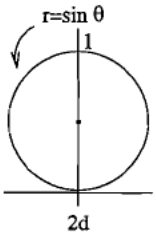
d) للدائرة المعادلة القطبية $r=2a\cos\theta$. المستقيم $y=a$ له المعادلة القطبيّة $r\sin\theta=a$، أو $r=acs\theta$. و منه تكون الحدود (بدون مكاملات):

$$\int\int_R drd\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{2a\cos\theta}^{a\csc\theta} drd\theta$$









2-3B

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin 2\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}=\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/2}=-\frac{1}{2}(-1-1)=1 \qquad (a$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big]_0^{a}=\frac{\pi}{4}\ln(1+a^2). \qquad (b$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\tan^2\theta\,r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{6}\tan^3\theta\Big]_0^{\pi/4}=\frac{1}{6} \qquad (c$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta \qquad (d$$

داخلي: $-\sqrt{1-r^2}\Big]_0^{\sin\theta}=1-\cos\theta.$ خارجي: $\theta-\sin\theta\Big]_0^{\pi/2}=\pi/2-1$.

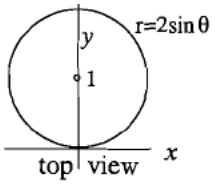
3-3B

a) نصف الكرة هو $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$، فنحصل إذن على:

$$\int\int_R\sqrt{a^2-r^2}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=2\pi\cdot-\frac{1}{3}\left(a^2-r^2\right)^{3/2}\Big]_0^{a}=2\pi\cdot\frac{1}{3}a^3=\frac{2}{3}\pi a^3$$

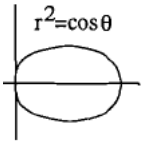
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{a}r^3dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^4}{8} \qquad (b$$

c) من أجل القدرة على استعمال صيغ التكامل في بداية **3B**، نستعمل التناظر حول المحور y لحساب الحجم للجانب الأيمن فقط، ونضاعف الإجابة.



$$\int\int_R\sqrt{x^2+y^2}\,dA=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta}r\,r\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}(2\sin\theta)^3\,d\theta$$
$$=2\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$$

انطلاقاً من صيغة التكامل في بداية **3B**.



$$2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\cos\theta}} r^2 rdrd\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\cos^2\theta d\theta = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ (d$$

3C. تطبيقات التكامل المزدوج

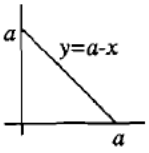
1-3C

بوضع المثلث بحيث يكون ساقيه في الجهة الموجبة للمحورين x و y،

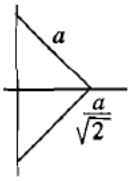
a) $\text{M.I.}=\int_0^a\int_0^{a-x}x^2dydx$

داخلي: $x^2y\Big]_0^{a-x}=x^2(a-x)$؛ خارجي: $\frac{1}{3}x^3a-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^a=\frac{1}{12}a^4$

b) $\int\int_R(x^2+y^2)dA=\int\int_R x^2dA+\int\int_R y^2dA=\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{12}a^4=\frac{1}{6}a^4$



c) نقسم المثلث بالتناظر إلى مثلثين صغيرين، ساقيهما $\frac{a}{\sqrt{2}}$؛



باستعمال نتيجة الجزء (a)، M.I. لـ R حول الوتر $=\frac{a^4}{24}=2\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4$

2-3C

في كلتا الحالتين، $\bar{x}$ واضح بالتناظر؛ نحن بحاجة فقط إلى $\bar{y}$.

a) الكتلة هي $\int\int_R dA=\int_0^\pi \sin x dx=2$

العزم على y هو $\int\int_R ydA=\int_0^\pi\int_0^{\sin x}ydydx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^2xdx=\frac{\pi}{4}$

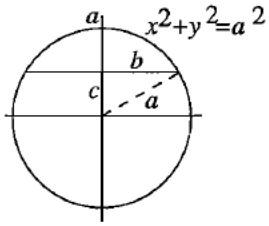
وبالتالي فإن $\bar{y}=\frac{\pi}{8}$.

b) الكتلة هي $\int\int_R ydA=\frac{\pi}{4}$ من الجزء (a). باستعمال الصيغ الموجودة في البداية 3B،

العزم على y هو $\int\int_R y^2dA=\int_0^\pi\int_0^{\sin x}y^2dydx=2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3x}{3}dx=2\cdot\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

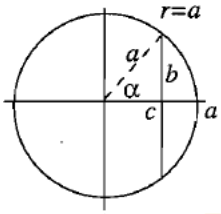
و بالتالي فإن $\bar{y}=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{16}{9\pi}$.

3-3C



ضع القطعة المستقيمة إمَّا أفقياً و إما عمودياً، بحيث يكون القطر على المحور x أو y. أوجد عزم نصف القطعة وضاعف الإجابة مرتين.

(a) (أفقياً، باستعمال الاحداثيات القطبية) لاحظ أنَّ $a^2-c^2=b^2$.



$$\int_0^b\int_c^{\sqrt{a^2-x^2}} ydydx=\int_0^b\frac{1}{2}\left(a^2-x^2-c^2\right)dx=\frac{1}{2}\left[b^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^b=\frac{1}{3}b^3$$

الإجابة $\frac{2}{3}b^3$.

(b) (عمودياً، باستعمال الاحداثيات القطبية). لاحظ أنَّ $x=c$ يصبح $r=c\sec\theta$.

$$\text{العزم}=\int_0^{\alpha}\int_{c\sec\theta}^{a}(r\cos\theta)\,rdrd\theta$$

داخلي: $\frac{1}{3}r^3\cos\theta\Big]_{c\sec\theta}^{a}=\frac{1}{3}\left(a^3\cos\theta-c^3\sec^2\theta\right)$

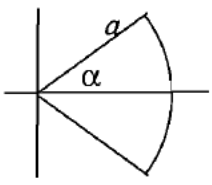
خارجي: $\frac{1}{3}\left[a^3\sin\theta-c^3\tan\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{3}\left(a^2b-c^2b\right)=\frac{1}{3}b^3$

الإجابة: $\frac{2}{3}b^3$.

4-3C

ضع المقطع بحيث تكون قمته على المبدأ ومحور تناظره يقع على الجهة الموجبة للمحور x. بالتناظر، مركز الكتلة يقع على المحور x، فنحن إذا بحاجة لـ $\bar{x}$ فقط.

بما أنَّ $\delta=1$، فإن مساحة القرص هي نفسها كتلته: $\pi a^2\cdot\frac{2\alpha}{2\pi}=a^2\alpha$.



العزم على x: $2\int_0^{\alpha}\int_0^{a}(r\cos\theta)\,rdrd\theta$

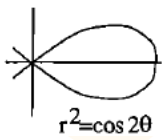
الداخلي: $\left.\frac{2}{3}r^3\cos\right]_0^{a}$؛

خارجي: $\left.\frac{2}{3}a^3\sin\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{2}{3}a^3\sin\alpha$ $\quad \bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin\alpha}{a^2\alpha}=\frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

5-C3

بالتناظر، نستعمل فقط النصف العلوي للحلقة ونضاعف مرتين الإجابة.

يقع النصف العلوي بين $\theta=0$ و $\theta=\pi/4$.

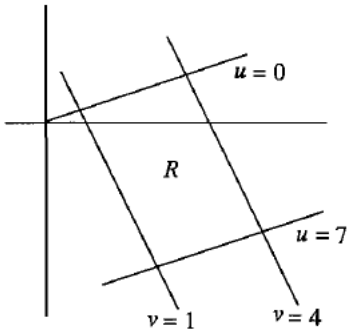


$$2\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^2rdrd\theta=2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\theta d\theta$$

بوضع $u=2\theta$، يساوي ما في أعلاه $\frac{a^4}{2\cdot 2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 udu=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^4}{16}$.

3D. تغيير المتغيرات

1-3D



ليكن $u = x - 3y$ ، $v = 2x + y$

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$ ؛ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{7}$.

$$\int\int_R \frac{x-3y}{2x+y}\,dxdy = \frac{1}{7}\int_0^7\int_1^4 \frac{u}{v}\,dvdu$$

داخلي: $u\ln v\Big]_1^4 = u\ln 4$ ؛ خارجي: $\frac{1}{2}u^2\ln 4\Big]_0^7 = \frac{49\ln 4}{2}$ ؛

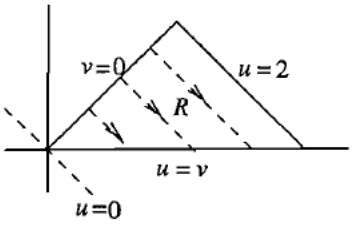
الإجابة : $\frac{1}{7}\frac{49\ln 4}{2} = 7\ln 2$

2-3D

لتكن $u = x + y$ ، $v = x - y$. إذن $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2$ ؛ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$.

للحصول على المعادلة uv لأسفل المنطقة المثلثية:

$y = 0 \Rightarrow u = x, v = x \Rightarrow u = v.$



$$\int\int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^u \cos\frac{v}{u}\,dvdu$$

داخلي: $u\sin\frac{v}{u}\Big]_0^u = u\sin 1$ خارجي: $\frac{1}{2}u^2\sin 1\Big]_0^2 = 2\sin 1$

الإجابة: $\sin 1$.

3-3D

لتكن $u=x$ ، $v=2y$. إذن $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}$.

بجعل R منطقة قطع ناقص المحدودة بـ $x^2+4y^2=16$ بالإحداثيات xy ، و $u^2+v^2=16$ بالإحداثيات uv (قرص دائري)، لدينا

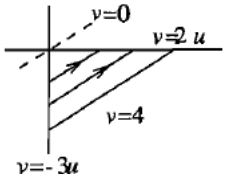
$$\int\int_R\left(16-x^2-4y^2\right)dydx=\frac{1}{2}\int\int_R\left(16-u^2-v^2\right)dvdu$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4(16-r^2)rdrd\theta=\pi\left(16\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^4=64\pi$$

4-3D

ليكن $u=x+y$ ، $v=2x-3y$ ؛ إذن $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5$ ؛ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{5}$

ثم نعبّر عن الحدود بدلالة المنطقة R في الإحداثيات uv.



بالنسبة للمحور x ، لدينا $y=0$ ، إذن $u=x$ ، $v=2x$ ، ومنه $v=2u$

بالنسبة للمحور y ، لدينا $x=0$ ، إذن $u=y$ ، $v=-3y$ ، ومنه $v=-3u$

من الأفضل المكاملة أولاً على الخط المستقيم الموضّح، $v=c$ ؛ يعني هذا أنَّ v تبقى ثابتة؛ أي، نحن نكامل أولاً بالنسبة إلى u. يعطي هذا:

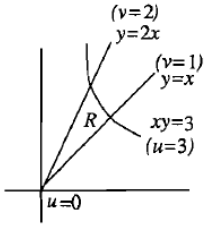
$$\int\int_R(2x-3y)^2(x+y)^2dxdy=\int_0^4\int_{-v/3}^{v/2}v^2u^2\frac{dudv}{5}$$

داخلي: $\dfrac{v^2}{15}u^3\Big]_{-v/3}^{v/2}=\dfrac{v^2}{15}v^3\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{-1}{27}\right)$ داخلي: $\dfrac{v^2}{6\cdot15}\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}\right)_0^4=\dfrac{4^6}{6\cdot15}\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}\right)$

5-3D

ليكن $u=xy$ ، $v=y/x$ ؛ يعطي هذا في الاتجاه الآخر $y^2=uv$ ، $x^2=u/v$.

لدينا $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}=\dfrac{2y}{x}=2v$ ؛ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2v}$



$$\int\int_R (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^3\int_1^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{1}{2v}\,dvdu$$

داخلي: $\left[\dfrac{-u}{2v}+\dfrac{u}{2}v\right]_1^2=u\left(-\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3u}{4}$ ؛ خارجي: $\left[\dfrac{3}{8}u^2\right]_0^3=\dfrac{27}{8}$.

8-3D

(a $y=x^2$ ؛ وبالتالي فإنَّ $u=x^3$ ، $v=x$ ، مما يعطي $u=v^3$.

(b نحصل على $uv=1$ ، أو $\dfrac{u}{v}$ $\left(\text{cf. 3D-5}\right)$ $u=\dfrac{v}{v^2+1}$