4. التكاملات الخطية في المستوي

4A- حقول المتجهات المستوية

4A-1 وصِّف بطريقة هندسية كيف تبدو حقول المتجهات المحدّدة بواسطة كل من دوال المتجهات التالية. من أجل كل حالة، حدد ما هي أكبر منطقة التي تكون فيها الدالة F قابلة للتفاضل بشكل مستمر.

(a

$a\mathbf{i}+b\mathbf{j},$ a، b ثوابت

(b

$-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}$

(c

$\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{r}$

(d

$\frac{y\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{j}}{r}$

4A-2 اكتب حقل المماسات (التدرج) ∇w لكل مما يلي:

(a

$w=ax+by$

(b

$w=\ln r$

(c

$w=f(r)$

4A-3 اكتب التعبير (الصيغة) الصريح لكل من الحقول التالية:

a) كل متجهات الحقل لها نفس الاتجاه وقيمة (طويلة) تساوي i + 2j

b) المتجه عند (x,y) يتجه بشكل شعاعي داخلي إلى مبدأ الاحداثيات، وقيمته (طويلته) تساوي r^2.

c) المتجه عند (x,y) مماس للدائرة التي مركزها مبدأ الاحداثيات عند (x,y)، باتجاه دوران عقارب الساعة وطويلته $1/r^2$.

d) كل متجه يكون موازي على i + j، ولكن طويلته تتغير من متجه إلى آخر.

4A-4 حقل القوة الكهرومغناطيسية لسلك على طول المحور z، ويحمل تياراً منتظماً، هو حقل ثنائي البعد، ومماس للدوائر الأفقية التي مراكزها تقع على طول المحور z، وله الاتجاه المعطى عن طريق قاعدة اليد اليمنى (بحيث يشير الابهام إلى الاتجاه الموجب للمحور z)، وبقيمة k/r. اكتب التعبير(الصيغة) لهذا الحقل.

4B- التكاملات الخطية في المستوي

4B-1 من أجل كل الحقول F والمنحني الموافق C أو المنحنيات C_i، قم بإيجاد قيمة التكامل $\int F.dr$.
استخدم أي وسيط مناسب من أجل C، مالم يتم تحديد ذلك بالسؤال.

ابدأ بكتابة التكاملات بالصيغة التفاضلية $\int c\ M\ dx + N\ dy$.

a) $F = (x^2 - y)\ i\ - 2x\ j$ ؛ C_1 و C_2 كلاهما تمتدان من (-1,0) إلى (1,0):
C_1 : المحور x C_2 : القطع المكافئ $y = 1 - x^2$
b) $F = xy\ i - x^2\ j$ ؛ C : هي الربع من دائرة الوحدة وتمتد من (0,1) إلى (1,0)،
c) $F = y\ i - x\ j$ ؛ C : هي المثلث الذي تقع رؤوسه عند (0,0), (0,1), (1,0)، باتجاه دوران عقارب الساعة.
d) $F = y\ i$ ؛ C : هو القطع الناقص $x = 2\ \cos t$، $y = \sin t$، بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.
e) $F = 6y\ i + x\ j$ ؛ C هو المنحني $x = t^2$، $y = t^3$، يمتد من (1,1) إلى (4,8).
f) $F = (x + y)\ i + xy\ j$ ؛ C هو القطعة المستقيمة المتقطعة التي تمتد من (0,0) إلى (0,2) إلى (1,2)

4B-2 من أجل الحقول F والمنحنيات C التالية، قم بإيجاد قيمة التكامل $\int_c F.dr$، دون القيام بأي حسابات، ولكن عن طريق تتبع هندسة F و C.

a) $F = x\ i + y\ j$ ؛ C هي الدائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة، والتي مركزها عند (0,0)، ونصف قطرها a.
b) $F = y\ i - x\ j$ ؛ C هي الدائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة، والتي مركزها عند (0,0)، ونصف قطرها a.

4B-3 لتكن $F = i + j$. كيف ستقوم بوضع قطعة مستقيمة موجَّهة طولها يساوي الواحد بحيث تكون قيمة $\int_c F.dr$

a) قيمة عظمى.
b) قيمة صغرى.
c) تساوي الصفر.
d) ما هي القيمة العظمى والقيمة الصغرى للتكامل؟

4C- حقول الميل (التدرج) والتفاضلات التامّة

4C-1 لتكن $f(x,y) = x^3y + y^3$، ولتكن $C : y^2 = x$، بيْن (1,-1) و (1,1)، وتتجه للأعلى.

a) احسب قيمة $F= \nabla f$

b) احسب قيمة التكامل $\int_c F.dr$ بثلاث طرق مختلفة هي:

(i) بطريقة مباشرة.

(ii) باستخدام طريقة استقلالية المسار لاستبدال C بمسار أبسط.

(iii) باستخدام النظرية الأساسية للتكاملات الخطية.

4C-2 لتكن $f(x,y) = xe^{xy}$، ولتكن $C : y = 1/x$، بيْن (1, 1) و $(0, \infty)$

a) احسب قيمة $F= \nabla f$

b) احسب التكامل $\int_c F.dr$

(i) بطريقة مباشرة.

(ii) باستخدام النظرية الأساسية للتكاملات الخطية.

4C-3 لتكن $f(x,y) = \sin x \cos y$

a) احسب قيمة $F= \nabla f$

b) ما هي القيمة العظمى لـ $\int_c F.dr$ التي يمكننا الحصول عليها على كامل المسارات المحتملة C في المستوي؟ أوجد المسار C الذي يحقق القيمة العظمى.

4C-4 النظرية الأساسية لإيجاد التكاملات الخطية يجب أن يطلق عليها النظرية الأساسية الأولى. هناك نظير أيضاً للتكاملات الخطية للنظرية الأساسية الثانية، حيث نقوم بالمكاملة أولاً ثم بالمفاضلة، هذه الطريقة تعطينا تعليل للطريقة 1 في هذا القسم. وهي كالتالي:

إذا كان التكامل $\int c\ Mdx + Ndy$ لا يعتمد على المسار،

و $f(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F.dr$

بالتالي $\nabla f = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$.

نستنتج أنّ $f_x = M, f_y = N$

برهن الطريقة الثانية (تلميح: استخدم النظرية الأساسية الثانية للتكامل والتفاضل).

4C-5 لكل مما يلي، ما هي قيم الثوابت ليكون الحقل حقل الميل (التدرّج)؛ ومن أجل هذه القيم، أوجد دالة الجهد (رياضياً) الموافقة.

(a

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2x)\,\mathbf{i} + axy\,\mathbf{j}$$

(b

$$\mathbf{F} = e^{x+y}\big((x + a)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}\big)$$

4C-6 حدّد أي من التفاضلات التالية هي تفاضلات تامة. من أجل كل واحد من التفاضلات التامة،عبر عنها بدلالة df

(a

$$y\,dx - x\,dy$$

(b

$$y(2x + y)\,dx + x(2y + x)\,dy$$

* (c

$$x \sin y\,dx + y \sin x\,dy$$

* (d

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{(x + y)^2}$$

4D- مبرهنة غرين

4D-1 قم بايجاد $\int_c F.dr$ من أجل كل من الحقول التالية **F** والمنحنيات C المغلقة التي تتجه بالاتجاه الموجب بشكل مباشر، كتكاملات خطية، وأيضاً عن طريق مبرهنة غرين وعن طريق حساب التكامل الثنائي.

(a

$$\mathbf{F}: \ 2y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}, \quad C: \ x^2 + y^2 = 1$$

(b

$$\mathbf{F}: \ x^2(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

C : مستطيل رؤوسه (0,0), (2,0) , (0,1) , (2,1)

(c

$$\mathbf{F}: \ xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$$

C : $y = x^2$ و $y = x$ ، $0 \le x \le 1$

4D-2 برهن أنّ

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy = 0$$

من أجل كل المنحنيات المغلقة C

4D-3 أوجد المساحة داخل دُحروج داخلي hypocycloid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$، باستخدام مبرهنة غرين. (هذا المنحني يمكن أن يعبّر عنه باستخدام المعادلات الوسيطية $x = \sin^3\Theta$، $y = \sin^3\Theta$ بين حدود مناسبة لـ Θ)

4D-4 برهن أنّ قيمة

$$\oint_C -y^3\,dx + x^3\,dy$$

حول أي منحني بسيط مغلق C يتجه بالاتجاه الموجب هي دائماً موجبة.

4D-5 برهن أن قيمة

$$\oint_C xy^2dx+(x^2y+2x)dy$$

حول أي مربع C في المستوي xy يعتمد فقط على قياس المربع، وليس على موضعه.

4D-6* برهن أنّ

$$\oint_C -x^2y\,dx+xy^2\,dy\ >\ 0$$

حول أي منحني بسيط ومغلق C.

4D-7* برهن أنّ قيمة

$$\oint_C y(y+3)\,dx+2xy\,dy$$

حول أي مثلث متساوي الأضلاع C يعتمد فقط على قياس المثلث، وليس على موقعه في المستوي xy.

4E- التدفق ثنائي البعد

4E-1 ليكن $F = -yi + xj$. بتذكّر تفسير الحقل (المثال 4، الملحق V1.5)، أو عن طريق تذكّر كيف يبدو هندسياً، قم بإيجاد (مع القليل من العمليات الحسابية أو دونها) تكامل التدفق $\int_C F.nds$ حيث:

a) C هي دائرة نصف قطرها a مركزها عند (0,0)، تتجه عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.
b) C هي قطعة مستقيمة تمتد من (-1,0) إلى (1,0).
c) C القطعة المستقيمة تمتد من (0,0) إلى (1,0).

4E-2 ليكن F حقل المتجهات الثابت $i + j$ أين يمكن أن تضع القطعة المستقيمة C الموجهة والتي طولها يساوي الواحد في المستوي ليصبح التدفق عبر C

a) أعظمي
b) أصغري
c) يساوي الصفر
d) يساوي -1
e) ما هي القيم الأعظمية والأصغرية؟

4E-3 لتكن $F = x^2\, i + xy\, j$. أوجد $\int_C F.n\, ds$ إذا كان C معطى بالمعادلة $r(t) = (t+1)i + t^2 j$، حيث $0 \le t \le 1$؛ الاتجاه الموجب لـ C هو اتجاه تزايد t.

4E-4 ليكن C هو المربع الذي ضلعه يساوي الواحد ورأساه المتقابلان هما (0,0) و (1,1)، ومتجه باتجاه دوران عقارب الساعة. لتكن $F = xi + yj$؛ أوجد التدفق عبر C.

4E-5 لتكن F معرَّفة في كل مكان ما عدا مبدأ الإحداثيات بالتوصيف التالي:

اتجاه F = شعاعي للخارج، $|F| = r^m$، m عدد صحيح.

a) قم بإيجاد التدفق لـ F عبر الدائرة التي نصف قطرها a ومركزها هو مبدأ الاحداثيات، ومتَّجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.
b) ما هي قيم m التي يكون من أجلها التدفق مستقلاً عن a؟

4E-6* لتكن F هي حقل المتجهات الثابت، وليكن C مضلَّع مغلق، متَّجه باتجاه دوران عقارب الساعة.

أظهر أنّ

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

(تلميح: أوجد قيمة التكامل على طول أحد الأضلاع الموجهة؛ ثم أضف التكاملات على الأضلاع المتتابعة، باستخدام خواص المتجهات)

4E-7 لتكن F حقل متجهات ثابت، و C هو مضلَّع مغلق، كما في التمرين السابق، برهن أنّ:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0.$$

4F- نظرية غرين بالشكل الناظمي (العامودي)

4F-1 احسب الدوال div F و curl F لكل من الحقول التالية.

(a) a i + b j (a، b ثوابت).

(b) $x^2\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

(c) $xy(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

4F-2 ليكن F = ω(-y i + x j) حقل المتجهات للملحق V1 ، المثال 4

a) احسب div F و curl F

b) باستخدام التفسير الفيزيائي لحقل المتجهات، اشرح لماذا من المنطقي أن div F = 0

c) باستخدام التفسير الفيزيائي لـ curl F، اشرح لماذا من المنطقي أن curl F = 2 ω عند مبدأ الإحداثيات.

4F-3 تحقق من نظرية غرين في الشكل الناظمي بحساب كل من الطرفين وإظهار أنّهما متساويان إذا كان F = x i + x j، و C هو النصف العلوي من دائرة الوحدة والقطعة الممتدة على المحور x [-1,1].

4F-4 تحقق من مبرهنة غرين في الشكل الناظمي بحساب كل من الطرفين وإظهار أنّهما متساويان إذا كان $F = x^2$ i + xy j، و C هو المربع الذي رأساه المتقابلان هما (0,0) و (1,1).

4F-5 احسب div F و curl F لـ $F = r^n(x\,i + y\,j)$.

(قم بتبسيط التفاضل باستخدام $r_x = x/r$، $r_y = y/r$)

ما هي قيم n التي من أجلها div F = 0؟ ماهي قيم n التي من أجلها curl F = 0؟

4F-6* افترض أنّ كل متجهات الحقل F تتجه بشكل شعاعي إلى الخارج وطويلة كل منها هي دالة f(r) قابلة للتفاضل فقط بدلالة r. برهن أن curl F = 0

4F-7* افترض أنّ كل متجهات الحقل F متوازية. بالتفكير عن طريق التفسير الهندسي لـ curl F، هل تتوقع أن تساوي الصفر في كل مكان؟ وضِّح إجابتك بمثال.

4. التكاملات الخطية في المستوي

4A- حقول المتجهات المستوية

4A-1

a) كل المتجهات في الحقل متطابقة؛ وقابلة للتفاضل بشكل مستمر في كل مكان
b) المتجه عند النقطة P وذيله عند النقطة P ورأسه عند مبدأ الاحداثيات؛ الحقل مستمر وقابل للتفاضل في كل مكان.
c) كل المتجهات لها طويلة تساوي طول الوحدة وتتجه بشكل شعاعي للخارج؛ مستمرة وقابلة للتفاضل باستثناء عند النقطة (0,0).
d) المتجه عند P له طول الوحدة، ويتجه باتجاه دوران الساعة وعمودي على OP.

4A-2

(a

$$a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$$

(b

$$\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{r^2}$$

(c

$$f'(r)\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{r}$$

4A-3

(a

$$\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

(b

$$-r(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})$$

(c

$$\frac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{r^3}$$

(d

$$f(x,y)(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

4A-4

$$k\cdot\frac{-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}}{r^2}$$

4B- التكاملات الخطية في المستوي

4B-1

a) عند

$$C_1:\ y=0,\ dy=0;$$

إذن

$$\int_{C_1}(x^2-y)\,dx+2x\,dy=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

عند

$$C_2:\ y=1-x^2,\ dy=-2x\,dx;$$

$$\int_{C_2}(x^2-y)\,dx+2x\,dy=\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\,dx-4x^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2-1)\,dx=-\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3}-2=-\frac{10}{3}.$$

b) C: استخدم المعادلات الوسيطية

$$x=\cos t,\ y=\sin t;$$

عندها

$$dx=-\sin t\,dt,\ dy=\cos t\,dt$$

$$\int_C xy\,dx-x^2\,dy=\int_{\pi/2}^{0}-\sin^2 t\cos t\,dt-\cos^2 t\cos t\,dt=-\int_{\pi/2}^{0}\cos t\,dt=-\sin t\Big]_{\pi/2}^{0}=1.$$

c)

$$C=C_1+C_2+C_3;\quad C_1: x=dx=0;\ C_2:\ y=1-x;\ C_3: y=dy=0$$

$$\int_C y\,dx-x\,dy\ =\ \int_{C_1}0+\int_0^1(1-x)dx-x(-dx)+\int_{C_3}0\ =\ \int_0^1 dx\ =\ 1.$$

d)

$$C: x=2\cos t,\ y=\sin t;\quad dx=-2\sin t\,dt\quad \int_C y\,dx=\int_0^{2\pi}-2\sin^2 t\,dt=-2\pi.$$

(e

$$C:\ x=t^2,\ y=t^3;\quad dx=2t\,dt,\ dy=3t^2\,dt$$

$$\int_C 6y\,dx+x\,dy=\int_1^2 6t^3(2t\,dt)+t^2(3t^2\,dt)=\int_1^2(15t^4)\,dt=3t^5\Big]_1^2=3\cdot 31.$$

(f

$$\int_C (x+y)dx+xy\,dy=\int_{C_1}0+\int_0^1(x+2)dx=\frac{x^2}{2}+2x\Big]_0^1=\frac{5}{2}.$$

4B-2

a) الحقل F يتجه بشكل شعاعي إلى الخارج، مماس الوحدة t للدائرة هو دائماً عمودي على نصف القطر؛ F.t = 0 و

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{t}\,ds=0$$

b) الحقل F هو دائماً مماس للدائرة التي نصف قطرها a، في اتجاه دوران عقارب الساعة، وبطويلة a . وبالتالي F = -at، وبالتالي

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{t}\,ds=-\int_C a\,ds=-2\pi a^2.$$

4B-3

a) القيمة عظمى إذا كانت C في اتجاه الحقل:

$$C=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

b) القيمة صغرى إذا كانت C في عكس اتجاه الحقل:

$$C=-\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

c) تساوي الصفر إذا كانت C عمودية على الحقل:

$$C=\pm\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

d) القيمة العظمى

$$\max=\sqrt{2},$$

القيمة الصغرى

$$\min = -\sqrt{2},$$

بواسطة (a) و (b)، من أجل القيمة العظمى أو الصغرى لـ F و C لهما على التتالي نفس أو عكس الاتجاه الثابت، وبالتالي

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm|\mathbf{F}| \cdot |C| = \pm\sqrt{2}.$$

4C- حقول الميل (التدرج) والتفاضلات التامّة

4C-1

(a

$$\mathbf{F} = \nabla f = 3x^2y\,\mathbf{i} + (x^3 + 3y^2)\,\mathbf{j}$$

(b

(i) باستخدام y كوسيط، C_1 هي

$$x = y^2,\ y = y;$$

وبالتالي

$$dx = 2y\,dy,$$

و

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} 3(y^2)^2 y\cdot 2y\,dy + [(y^2)^3 + 3y^2]\,dy = \int_{-1}^{1} (7y^6 + 3y^2)\,dy = (y^7 + y^3)\big]_{-1}^{1} = 4.$$

(ii) باستخدام y كوسيط، C_2 هي

$$x = 1,\ y = y;$$

وبالتالي

$$dx = 0,$$

و

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} (1 + 3y^2)\,dy = (y + y^3)\big]_{-1}^{1} = 4.$$

(iii) باستخدام الطريقة الأساسية للتكاملات الخطية،

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

هنا:

$$A = (1,-1) \text{ and } B = (1,1),$$

وبالتالي

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = (1+1) - (-1-1) = 4.$$

4C-2

(a

$$\mathbf{F} = \nabla f = (xye^{xy} + e^{xy})\,\mathbf{i} + (x^2e^{xy})\,\mathbf{j}\ .$$

(b

(i) باستخدام x كوسيط، C هو:

$$x = x,\ y = 1/x,\ \text{so}\ dy = -dx/x^2,$$

وبالتالي،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 (e+e)\,dx + (x^2e)(-dx/x^2) = (2ex - ex)\Big]_1^0 = -e.$$

(ii) باستخدام (F.T.C.) الطريقة الأساسية للتكاملات الخطية.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1,1) - f(0,\infty) = 0 - e = -e.$$

4C-3

(a

$$\mathbf{F} = \nabla f = (\cos x \cos y)\,\mathbf{i} - (\sin x \sin y)\,\mathbf{j}\,.$$

b) بما أنّ $\int_c$ F.dr لا يعتمد على المسار، من أجل أي C تربط A : (x_0,y_0) إلى (x_1,y_1)، لدينا بواسطة F.T.C، النظرية الأساسية للتكاملات الخطية.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \sin x_1 \cos y_1 - \sin x_0 \cos y_0$$

هذا الاختلاف في الطرف الأيمن يصل إلى حده الأقصى إذا كانت $\sin x_1 \cos y_1$ بقيمتها العظمى، و $\sin x_0 \cos y_0$ بقيمتها الدنيا.

بما أنّ

$$|\sin x \cos y| = |\sin x||\cos y| \le 1,$$

الاختلاف في الطرف الأيمن له قيمة عظمى تساوي 2 تتحقق عندما

$$\sin x_1 \cos y_1 = 1 \quad \text{و} \quad \sin x_0 \cos y_0 = -1.$$

(كمثال، مسار C يمتد من $(-\pi/2, 0)$ إلى $(\pi/2, 0)$ يعطينا القيمة العظمى)

4C-5

a) هو حقل ميل (تدرّج)، فقط أذا كان $M_y = N_x$، ذلك إذا كان $2y = ay$، وبالتالي $a = 2$

بإعادة النظر، دالة الجهد هي

$$f(x,y) = xy^2 + x^2 + c;$$

يمكنك التحقق من أن:

$$F = \nabla f$$

b) المعادلة $M_y = N_x$ تصبح

$$e^{x+y}(x+a) = xe^{x+y} + e^{x+y},$$

بحيث يساوي

$$e^{x+y}(x+1).$$

لذلك $a = 1$

لإيجاد دالة الجهد f(x,y)، باستخدام الطريقة 2 لدينا

$$f_x = e^y e^x (x+1) \;\Rightarrow\; f(x,y) = e^y x e^x + g(y).$$

بالمفاضلة ومقارنة النتيجة بـ N، نجد أن

$$f_y = e^y x e^x + g'(y) = x e^{x+y};\ \text{therefore } g'(y) = 0,\ \text{so } g(y) = c \text{ and } f(x,y) = x\,e^{x+y} + c.$$

4C-6

(a

ydx – xdy ليس تاماً، بما أنّ $M_y = 1$ ولكن $N_x = -1$

(b

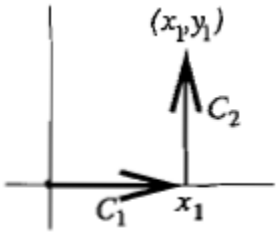
$$y(2x + y)\,dx + x(2y + x)\,dy$$

تام، حيث أنّ

$$M_y = 2x + 2y = N_x.$$

باستخدام الطريقة 1 لإيجاد دالة الجهد f(x,y)، نحسب التكامل الخطي على المسار الخطي القياسي المكسور الظاهر، $C = C_1 + C_2$

$$f(x_1, y_1) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} y(2x + y)\,dx + x(2y + x)\,dy.$$



على C_1 لدينا $y = 0$ و $dy = 0$، وبالتالي

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

على C_2 لدينا $x = 0$ و $dx = 0$، وبالتالي

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{y_1} x_1(2y + x_1)\,dx = x_1 y_1^2 + x_1^2 y_1.$$

لذلك،

$$f(x, y) = x^2 y + xy^2;$$

للحصول على كل الدوال الممكنة، أضف C+

4D- مبرهنة غرين

4D-1

a) بإيجاد التكامل الخطي أولاً، لدينا C : x = cos t ،y = sin t، وبالتالي

$$\oint_C 2y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 - 3\sin^2 t)\,dt = t - 3\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big]_0^{2\pi} = -\pi.$$

من أجل التكامل الثنائي على المنطقة الدائرية R داخل C، لدينا

$$\iint_R (N_x - M_y)\,dA = \iint_R (1-2)\,dA = -\text{ area of } R = -\pi.$$

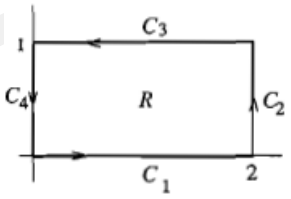
b) بإيجاد التكامل الخطي، على المسار المبين $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$،

$$\oint_C x^2dx + x^2dy = \int_0^2 x^2dx + \int_0^1 4\,dy + \int_2^0 x^2dx + \int_1^0 0\,dy \;=\; 4,$$

بما أنّ التكاملين الأول والثالث يلغيان بعضهما بعضاً، والرابع يساوي 0

للتكامل الثنائي على المستطيل R،

$$\iint_R 2x\,dA = \int_0^2 \int_0^1 2x\,dydx = x^2\Big]_0^2 = 4.$$



c) بإيجاد التكامل الخطي على $C = C_1 + C_2$، لدينا

:C_1

$$x = x,\ y = x^2;\ \int_{C_1} xy\,dx + y^2dy = \int_0^1 x\cdot x^2dx + x^4\cdot 2x\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{3}\Big]_0^1 = \frac{7}{12}$$

:C_2

$$C_2:\ x = x,\ y = x;\ \int_{C_2} xy\,dx + y^2dy = \int_1^0 (x^2dx + x^2dx) = \frac{2}{3}x^3\Big]_1^0 = -\frac{2}{3}.$$

إذاً:

$$\oint_C xy\,dx + y^2dy = \frac{7}{12} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{12}.$$

بإيجاد قيمة التكامل الثنائي على المعامل الداخلي R لـ C، لدينا

$$\iint_R -x\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} -x\,dy\,dx;$$

إيجاد قيمة التكامل:

الداخلي

$$-xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} = -x^2 + x^3; \quad \text{Outer: } -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

4D-2

باستخدام مبرهنة غرين،

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy = \iint (4x^3 - 4x^3)\,dA = 0.$$

هذا صحيح من أجل كل منحني مغلق C في المستوي، بما أنّ M و N لهما مشتقات مستمرة من أجل كل قيم x,y .

4D-3

باستخدام الشكل التناظري للمُكامل حيث أنّ استخدام المتغيّر الوسيط للمنحني لا تفضّل x أو y؛ هذا يؤدي إلى أسهل العمليات الحسابية.

المساحة تساوي:

$$\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^4 t\cos^2 t\,dt + 3\sin^2 t\cos^4 t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

باستخدام

$$\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{1}{4}(\sin 2t)^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}(1-\cos 4t)$$

المساحة تساوي:

$$\frac{3}{8}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right)_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{8}.$$

4D-4

باستخدام مبرهنة غرين

$$\oint_C -y^3dx+x^3dy=\iint_R (3x^2+3y^2)\,dA>0,$$

بما أنّ المُكامل هو موجب دائماً خارج المنطقة

4D-5

لتكن C مربع، و R هي المنطقة الداخلية. باستخدام مبرهنة غرين،

$$\oint_C xy^2dx+(x^2y+2x)\,dy=\iint_R (2xy+2-2xy)\,dA=\iint_R 2\,dA=\ 2(\text{area of } R).$$

4E- التدفق ثنائي البعد

4E-1

المتجه F هو متجه السرعة لقرص دوّار؛ هو مماس عند كل نقطة للدائرة التي مركزها هو مبدأ الإحداثيات ويمر خلال تلك النقطة.

a) بما أنّ المتجه F مماس للدائرة، F.n = 0 عند كل نقطة على الدائرة، لذلك فالتدفق يساوي الصفر.

b) F = x j عند النقطة (x,0) على المستقيم. إذاً إذا كان $x_0 > 0$، فالتدفق عند النقطة x_0 لديه نفس القيمة للتدفق عند النقطة $-x_0$ ولكن إشارته معاكسة، وبالتالي فصافي التدفق على الخط تساوي الصفر.

c)

$$\mathbf{n} = -\mathbf{j}, \text{ so } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x\mathbf{j} \cdot -\mathbf{j} = -x.$$

وبالتالي:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^1 -x\, dx = -\frac{1}{2}.$$

4E-2

كل متجهات F لها طول √2 وتشير نحو الشمال الشرقي. وبالتالي التدفق خلال القطعة المستقيمة C بطول يساوي الواحد ستكون:

a) أعظمياً، إذا كان C يشير نحو الشمال الشرقي.

b) أصغري، إذا كان C يشير نحو الجنوب الغربي.

c) يساوي الصفر، إذا كان C يشير نحو الشمال الشرقي والجنوب الغربي.

d) يساوي -1، إذا كان C له اتجاه وطول i أو –j ؛ المتجهات الناظمية الموافقة هي على الترتيب: –j و –i، كما جرت العادة، وبالتالي F.n = (i +j). -j = -1. أو F.n = (i +j). -i = -1.

e) القيمة العظمى هي √2 والقيمة الصغرى هي -√2، بما أنّ الزاوية Θ بين F و n هي على الترتيب 0 و π، وبالتالي القيم على الترتيب هي $F.n = |F| \cos\Theta = \pm\sqrt{2}$

4E-3

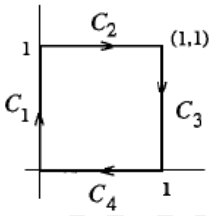
$$\int_C M\,dy - N\,dx = \int_C x^2 dy - xy\,dx = \int_0^1 (t+1)^2 2t\,dt - (t+1)t^2\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t)\,dt = \frac{t^4}{4} + t^3 + t^2\Big]_0^1 = \frac{9}{4}.$$

4E-4

بأخذ المنحني $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ كما يظهر في الشكل التالي

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \int_{C_1} 0 + \int_0^1 -dx + \int_1^0 dy + \int_{C_4} 0 = -2.$$



4E-5

بما أن F و n كلاهما يتجهان بشكل شعاعي للخارج، $F.n = |F| = a^m$، عند كل نقطة من الدائرة C بنصف قطر a ومركزها عند مبدأ الإحداثيات.

a) التدفق عبر C هو

$$a^m \cdot 2\pi a = 2\pi a^{m+1}$$

b) يكون التدفق مستقلاً عن a إذا كان m = -1

4F- نظرية غرين بالشكل الناظمي (العامودي)

4F-1

a) كلاهما يساوي الصفر.

b)

$$\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2y; \quad \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

c)

$$\text{div } \mathbf{F} = x + y; \quad \text{curl } \mathbf{F} = y - x$$

4F-2

a)

$$\text{div } \mathbf{F} = (-\omega y)_x + (\omega x)_y = 0; \quad \text{curl } \mathbf{F} = (\omega x)_x - (-\omega y)_y = 2\omega.$$

b) بما أن F هو حقل السرعة الاتجاهية لسائل يدور بسرعة زاوية ثابتة (مثل قرص صلب)، ليس هناك منابع أو مصارف: السائل لا يضاف إلى ولا يطرح من التدفق عند أي نقطة.

c) ناعورة متموضعة عند مبدأ الإحداثيات ستدور بنفس السرعة الزاوية ω للسائل الدوّار، وبالتالي باستخدام (15)، التقوّس سيساوي 2ω عند مبدأ الإحداثيات. إنه أقل وضوحاً أن التقوّس هو 2ω عند كل النقاط الأخرى.

4F-3

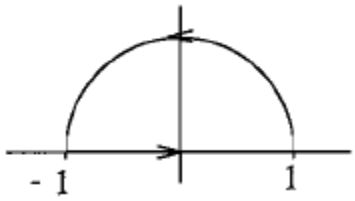
التكامل الخطي للتدفق هو

$$\int_C x\,dy - y\,dx;$$

قيمته تساوي الصفر عند أي قطعة من المحور x بما أن y = dy = 0 ؛ على القسم العلوي لنصف دائرة الوحدة (بعكس اتجاه عقارب الساعة)، F.n = 1، وبالتالي فالتدفق هو طول نصف الدائرة : π

لتكن R هي المنطقة داخل C

$$\iint_R \text{div } \mathbf{F}\,dA = \iint_R 2\,dA = 2(\pi/2) = \pi.$$



4F-4

لتكامل التدفق التالي

$$\oint_C x^2\,dy - xy\,dx$$

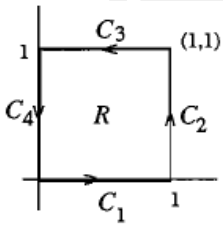
على $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

لدينا الجوانب الأربعة على التتالي

$$\int_{C_1} 0 + \int_0^1 dy + \int_1^0 -x\,dx + \int_{C_4} 0 = \frac{3}{2}.$$

للتكامل الثنائي،

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\,dA = \iint_R 3x\,dA = \int_0^1 \int_0^1 3x\,dy dx = \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}.$$



4F-5

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \;\Rightarrow\; r_x = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r};$$ ؛

بالتناظر $r_y = y/r$.

لحساب div F، لدينا $M = r^n x$ و $N = r^n y$ ؛ لذلك باستخدام قانون السلسلة، والقيم السابقة لـ r_x و r_Y، لدينا:

$$M_x = r^n + nr^{n-1}x \cdot \frac{x}{r} = r^n + n\,r^{n-2}x^2;$$

بطريقة مماثلة (أو بالتناظر)،

$$N_y = r^n + nr^{n-1}y \cdot \frac{y}{r} = r^n + n\,r^{n-2}y^2,$$

وبالتالي

$$\text{div } \mathbf{F} = M_x + N_y = 2r^n + nr^{n-2}(x^2+y^2) = r^n(2+n), \text{ which } = 0 \text{ if } n = -2.$$

لحساب curl F ، لدينا باستخدام قانون السلسلة

$$N_x = nr^{n-1} \cdot \frac{x}{r} \cdot y; \quad M_y = nr^{n-1} \cdot \frac{y}{r} \cdot x, \quad \text{so that } \text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y = 0, \text{ for all } n.$$