5. التكاملات الثلاثية

5A- التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية

5A-1 قم بإيجاد قيمة كل من التكاملات التالية:

(a

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

(b

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} \int_0^{xy} 2xy^2 z\,dz\,dx\,dy$$

5A-2 قم باتباع الخطوات الثلاث المذكورة في المذكرة الدراسية لوضع حدود التكاملات الثلاثية على المناطق التالية في الفضاء

a) الموشور القائم الذي قاعدتاه هما المثلث في المستوي yz (حيث أضلاعه هي جزء من المحور x وجزء من المحور y و قطعة من المستقيم $y + z = 1$) والمثلث المقابل في المستوي $x = 1$ والذي نحصل عليه بإضافة 1 إلى الإحداثي x لكل نقطة من نقاط المثلث الأول. قم بإيجاد الحدود للتكامل ولكن بثلاث ترتيبات مختلفة له.

(i) $\iiint dz\,dy\,dx$ (ii) $\iiint dx\,dz\,dy$ (iii) $\iiint dy\,dx\,dz$

b) *رباعي الوجوه الذي يقع أحد رؤوسه عند مبدأ الإحداثيات كما تقع الرؤوس الثلاث المتبقة على المحاور الثلاث وهي بالترتيب $x = 1$ و $y = 2$ و $z = 2$. استخدم الترتيب

$$\iiint dz\,dy\,dx.$$

c) ربع أسطوانة دائرية بنصف قطر يساوي 1 وارتفاع يساوي 2 تقع في الثمن الأول والذي محورها المركزي هو

$$0 \le y \le 2$$

على المحور y، وقاعدتها ربع الدائرة في المستوي xy والذي مركزها في مبدأ الإحداثيات، ونصف قطرها يساوي 1، والتي تقع في الربع الأول. قم بالمكاملة بالنسبة لـ y أولاً؛ قم باستخدام نظام إحداثيات أسطواني مناسب.

d) المنطقة محددة من الأسفل بالمخروط

$$z^2 = x^2 + y^2$$

ومن الأعلى بالكرة التي نصف قطرها $\sqrt{2}$ ومركزها عند مبدأ الإحداثيات. قم باستخدام الإحداثيات الأسطوانية.

5A-3 قم بإيجاد مركز الكتلة لرباعي السطوح D في الثمن الأول والمشكَّل بواسطة المستويات الإحداثية (xy ، yz ، xz) و المستوي $x + y + z = 1$. افترض أنّ $\delta = 1$

5A-4 مجسم مخروطي دائري قائم ارتفاعه h وزاويته الرأسية (زاوية القمة) تساوي 90^0 وكثافته في النقطة P تساوي عددياً المسافة من النقطة P إلى المحور المركزي. اختر موضع المخروط الذي سيؤدي إلى أبسط صيغة للتكامل، قم بإيجاد:

a) كتلته

b) مركز الكتلة.

5A-5 مجسم S ، هو جزء من محرك، له شكل هرم مصري ارتفاعه 2 وقاعدة مربعة بقطر D طوله يساوي 2. داخل المحرك يدور هذا المجسم حول D. اكتب التكامل المتعدد (دون حساب قيمته) الذي يعطي عزم العطالة حول D. افترض أنّ $\delta = 1$

(اختر موضع S بحيث يكون الجزء الموجب من المحور z هو المحور المركزي له).

5A-6 باستخدام الإحداثيات الأسطوانية، قم بإيجاد عزم العطالة لمجسم نصف كروي D نصف قطره a حول المحور المركزي العمودي على قاعدة D. افترض أنّ $\delta = 1$

5A-7 السطح المكافئ $z = x^2 + y^2$ له هيئة كأس نبيذ ، ويقطعه المستوي $z = 2x$ بحيث تنتج لدينا منطقة محدودة D فوق السطح المكافئ (المنطقة D تقع داخل الشكل الذي على هيئة كأس نبيذ).

أوجد عزم العطالة لـ D حول المحور x. افترض أنّ $\delta = 1$

4B- التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الكروية

5B-1 قم بوضع حدود التكامل المتتابع في الاحداثيات الكروية $\iiint d\rho\, d\emptyset\, d\Theta$ لكل من المناطق التالية: (المُكامل ليس محدد؛ $d\rho\, d\emptyset\, d\Theta$ هو ترتيب التكامل).

a) المنطقة من التمرين 5A-2d: محددة من الأسفل بالمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ ومن الأعلى بكرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ ومركزها مبدأ الإحداثيات.

b) المنطقة في الثمن الأول.

C) الجزء من الكرة التي نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها عند $z = 1$ على المحور z والذي يقع على المستوي $z = 1$.

5B-2 أوجد مركز الكتلة لنصف كرة بنصف قطر يساوي a، باستخدام الإحداثيات الكروية بفرض أنّ الكثافة $\delta = 1$

5B-3 مجسم D محدد من الأسفل بمخروط دائري قائم حيث طول مولّده يساوي a ويصنع زاوية تساوي $\pi/6$ مع المحور المركزي. هو محدد من الأعلى بجزء من كرة نصف قطرها a ومركزها هو قمة المخروط. قم بإيجاد عزم عطالته حول محوره المركزي، بفرض أنّ الكثافة δ عند نقطة ما تساوي عددياً مسافة النقطة من المستوي الذي يمر من القمة والعمودي على المحور المركزي.

5B-4 أوجد متوسط البعد لنقطة في كرة نصف قطرها a من

a) المركز.

b) قطر ثابت.

c) مستوي ثابت يمر من المركز.

5C- الجاذبية الأرضية

5C-1 *قم بإيجاد الجاذبية لمجسم V محدد بمخروط دائري قائم بزاوية رأسية تساوي 60 درجة وارتفاع مائل a، يعلوه قبة كروية نصف قطرها a مركزها عند ذروة المخروط؛ ولتكن الكثافة تساوي

1 (a

b) المسافة من الذروة.

الإجابات: a) $\pi Ga^2/4$ b) $\pi Ga^2/8$

5C-2 أوجد الجاذبية للمنطقة المحددة من الأعلى بالمستوي z = 2 ومن الأسفل بالمخروط

$$z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

على كتلة الوحدة عند مبدأ الإحداثيات؛ لتكن $\delta = 1$.

5C-3 أوجد الجاذبية لمجسم كروي نصف قطره يساوي الواحد على كتلة الوحدة النقطية Q موجودة على سطحه، إذا كانت كثافة الكرة عند النقطة P(x,y,z) تساوي $|PQ|^{-1/2}$

5C-4 أوجد الجاذبية للمنطقة المحددة من الأعلى بالكرة:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

ومن الأسفل بالكرة

$$x^2+y^2+z^2=2z$$

على كتلة الوحدة عند مبدأ الإحداثيات. (لتكن $\delta = 1$).

5C-5 *أوجد الجاذبية لمجسم نصف كروي نصف قطره a وكثافته تساوي الواحد على كتلة الوحدة النقطية الموجودة على قطب الدائرة.

الإجابة: $2\pi Ga\,(1 - \sqrt{2}/3)$

5C-6 ليكن V مجسم كروي منتظم كتلته M ونصف قطره a. قم بوضع كتلة الوحدة النقطية على بعد b من مركز المجسم V. برهن أنّ جاذبية V على الكتلة النقطية تساوي

GM/b^2 (a إذا كانت $b \geq a$ GM'/b^2 (b إذا كانت $b \leq a$ حيث $M' = (b^3/a^3)M$

الجزء (a) هي نظرية نيوتن، النظرية مشروحة بالملاحظات. الجزء (b) ينص على أنّ الجزء الخارجي من الكرة –القشرة الكروية التي نصف قطرها الداخلي b ونصف قطرها الخارجي a– لا تبذل أي قوة على كتلة الإختبار: كل الجاذبية تأتي من من الكرة الداخلية التي نصف قطرها b، والتي كتلتها الكلية $(b^3/a^3)M$.

5C-7 *استخدم المسألة 6b لاظهار أنه إذا قمنا بحفر حفرة عمودية عبر الأرض (من جانب إلى الجانب الآخر)، فستستغرق الكتلة النقطية m زمناً مقداره $\pi/\sqrt{(R/g)} = 42$ دقيقة للسقوط من أحد الجانبين إلى الجانب الآخر بغض النظر عن طول الحفرة.

(اكتب $F = m\,a$، لتكن x هي المسافة من منتصف الحفرة، واحصل على معادلة لحركة توافقية بسيطة من أجل $x(t)$. هنا

R هو نصف قطر الأرض

M كتلة الأرض

$g = GM/R^2$

5. التكاملات الثلاثية

5A- التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية

5A-1

(a

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^1 (x+y+z)dx\,dy\,dz$$

التكامل الداخلي:

$$\tfrac{1}{2}x^2 + x(y+z)\Big]_{x=0}^{1} = \tfrac{1}{2} + y + z$$

التكامل الأوسط:

$$\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y^2 + yz\Big]_{y=-1}^{1} = 1 + z - (-z) = 1 + 2z$$

التكامل الخارجي:

$$z + z^2\Big]_0^2 = 6$$

(b

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} \int_0^{xy} 2xy^2 z\,dz\,dx\,dy$$

التكامل الداخلي:

$$xy^2 z^2\Big]_0^{xy} = x^3 y^4$$

التكامل الأوسط:

$$\tfrac{1}{4}x^4 y^4\Big]_0^{\sqrt{y}} = \tfrac{1}{4}y^6$$

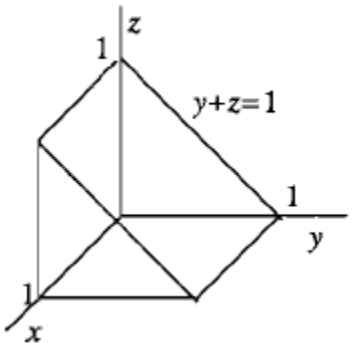
التكامل الخارجي:

$$\tfrac{1}{28}y^7\Big]_0^2 = \tfrac{32}{7}$$

5A-2

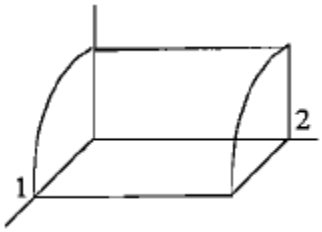
(a

$$\text{(i)}\ \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx \quad \text{(ii)}\ \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^1 dx\,dz\,dy \quad \text{(iii)}\ \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dx\,dz$$



c) في الإحداثيات الأسطوانية، مع استخدام الإحداثيات القطبية r و Θ في المستوي xz، نحصل على

$$\iiint_R dy\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 dy\,dr\,d\theta$$



معادلة الكرة $x^2+y^2+z^2 = 2$ أو $r^2 + z^2 = 2$ في الإحداثيات الأسطوانية.

معادلة المخروط $z^2 = r^2$ أو $z = r$

يتقاطع الكرة والمخروط عند دائرة نصف قطرها r ونحصل عليها بحل المعادلتين التاليتين:

$z = r$ و $z^2 + r^2 = 2$ معاً.

بحذف z نحصل على $r^2 = 1$ وبالتالي $r = 1$ بحل جميع المعادلات السابقة معاً، نحصل على

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

5A-3 بالتناظر

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z},$$

وبالتالي يكفي أن نقوم بإيجاد أحدها فقط، وليكن $\bar{z}$ وبالتالي فلدينا:

عزم العطالة-z =

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$$

التكامل الداخلي:

$$\tfrac{1}{2}z^2\Big]_0^{1-x-y} = \tfrac{1}{2}(1-x-y)^2$$

التكامل الأوسط:

$$-\tfrac{1}{6}(1-x-y)^3\Big]_0^{1-x} = \tfrac{1}{6}(1-x)^3$$

التكامل الخارجي:

$$-\tfrac{1}{24}(1-x)^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{24} = \bar{z} \text{ moment.}$$

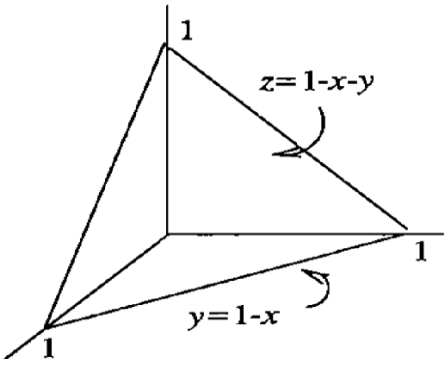
كتلة D = حجم D = 1/3 (القاعدة) (الارتفاع) =

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{6}.$$

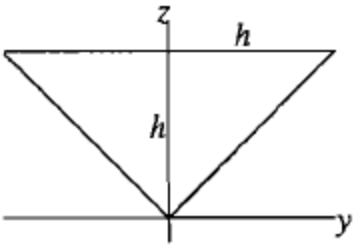
وبالتالي

$$\bar{z} = \tfrac{1}{24}/\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{4};$$

و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ يساوي هذه القيمة بالتناظر.



5A-4 بوضع المخروط كما في الشكل، معادلته في الإحداثيات الأسطوانية هي z=r والكثافة تعطى بـ $\delta = r$. باستخدام الطريقة الهندسية، فإنّ مسقطه على المستوي xy هي المنطقة R داخل الدائرة التي مركزها هو مبدأ الإحداثيات و نصف قطرها h.



a) كتلة المجسم D =

$$\iiint_D \delta \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_r^h r \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$$

التكامل الداخلي:

$$(h - r)r^2;$$

التكامل الأوسط:

$$\frac{hr^3}{3} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^h = \frac{h^4}{12};$$

التكامل الخارجي:

$$\frac{2\pi h^4}{12}$$

b) بالتناظر، مركز الكتلة يقع على المحور x، وبالتالي علينا فقط إيجاد مركبته على المحور z، $\bar{z}$

عزم عطالة D على المحور z =

$$\iiint_D z \, \delta \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_r^h zr \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$$

التكامل الداخلي:

$$\tfrac{1}{2} z^2 r^2 \Big]_r^h = \tfrac{1}{2}(h^2 r^2 - r^4)$$

التكامل الأوسط:

$$\frac{1}{2}\left(h^2\frac{r^2}{3}-\frac{r^5}{5}\right)_0^h=\frac{1}{2}h^5\cdot\frac{2}{15}$$

التكامل الخارجي:

$$\frac{2\pi h^5}{15}.$$

وبالتالي،

$$\bar{z}=\frac{\frac{2}{15}\pi h^5}{\frac{2}{12}\pi h^4}=\frac{4}{5}h.$$

5A-5 قم بوضع S بحيث تكون قاعدتها في المستوي xy و قطرها D يقع على المحور x (ويمكن أن يكون على المحور y فالأمران سيان). الأجزاء الثمانية للإحداثيات تقسم s إلى أربع رباعيات سطوح، والتي بالتناظر لها عزم العطالة نفسه حول المحور x؛ سنقوم بحساب رباعي السطوح الموجود في الثمن الأول. (الشكل يشبه الشكل من 5A-3 ولكن الإرتفاع يساوي 2).

السطح العلوي لرباعي السطوح هو المستوي الذي يقطع x و y عند 1، و المحور z عند 2. و بالتالي فمعادلته هي $x + y + ½ z = 1$

مربع المسافة من النقطة (x,y,z) إلى محور التدوير (المحور x) تعطى بواسطة $x^2 + z^2$ وبالتالي سنحصل على:

عزم العطالة =

$$4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2(1-x-y)}(y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx.$$

5A-6 بوضع D بحيث يقع محوره على الجزء الموجب وقاعدته هي القرص الذي مركزه عند مبدأ الإحداثيات و نصف قطره a في المستوي xy، تكون معادلة نصف الكرة هي:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

أو

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

في الإحداثيات الأسطوانية.

بإيجاد التكامل الداخلي والخارجي ذهنياً:

عزم العطالة z لـ D =

$$\iiint_D r^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr.$$

يمكن إيجاد التكامل بإستخدام المكاملة بالتجزئة (اكتب صيغة المُكامل $r^2 \cdot r\sqrt{a^2-r^2}$)، أو عن طريق الإستبدال؛

باتباع الطريقة الأخيرة، سنقوم بالاستبدال

$$r = a\sin u,\ dr = a\cos u\,du,$$

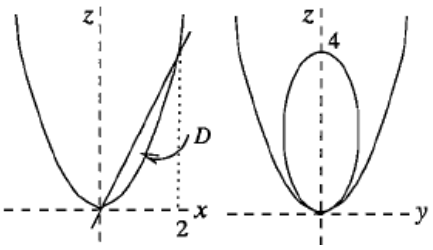
ونحصل (باستخدام الصيغ الموجودة في بداية الواجب 3B) على:

$$\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr = \int_0^{\pi/2} a^3\sin^3 u\cdot a^2\cos^2 u\,du$$

$$= a^5\int_0^{\pi/2}(\sin^3 u - \sin^5 u)\,du = a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\right) = \frac{2}{15}a^5. \qquad \text{Ans: } \frac{4\pi}{15}a^5.$$

5A-7 المجسم D محدد من الأسفل بـ $z = x^2 + y^2$، ومن الأعلى بـ $z = 2x$. المشكلة الرئيسية هي تحديد المسقط R لـ D على المستوي xy، بما أننا نحتاج لمعرفة ذلك قبل أن نستطيع وضع حدود التكامل.

المنحني المحيط بـ R هو مسقط (الظل العمودي) للمنحني المشكّل من تقاطع القطع المكافئ والمستوي. هذا المنحني مؤلف من النقاط التي يتقاطع عندها $z = 2x$ و $z = x^2 + y^2$، بعبارة أخرى، بالحل المشترك للمعادلتين. لإسقاط المنحني، سنهمل المركبة z للنقاط الواقعة عليها. بطريقة جبرية، هذا يعني حل المعادلات حلاً مشتركاً باستبعاد z من المعادلتين؛ بالقيام بذلك ، سنحصل على المنحني المحيط بـ R : $x^2 + y^2 = 2x$ أو باستكمال المربَّع $(x - 1)^2 + y^2 = 1$



هذه دائرة بنصف قطر يساوي 1 و مركزها عند النقطة (1,0)، وبالتالي معادلتها القطبية هي

$R = 2\cos\Theta$.

عزم العطالة z لـ D =

$$2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_{x^2+y^2}^{2x} r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_{r^2}^{2r\cos\theta} r^3\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3(2r\cos\theta - r^2)\,dr\,d\theta$$

التكامل الداخلي:

$$\frac{2}{5}r^5\cos\theta - \frac{1}{6}r^6\Big]_0^{2\cos\theta} = \frac{2}{5}\cdot 32\cos^6\theta - \frac{1}{3}\cdot 32\cos^6\theta$$

التكامل الخارجي:

$$\cdot\frac{32}{15}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta = \cdot\frac{32}{15}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

الإجابة:

$$\frac{2\pi}{3}$$

5B- التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الكروية

5B-1

a) الزاوية بين المحور المركزي للمخروط و أي خط من خطوط المخروط تساوي $\pi/4$ ؛ الكرة هي $P = \sqrt{2}$

وبالتالي فالحدود هي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

(المُكامل غير معطى)

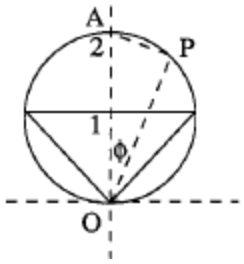
b) الحدود هي

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} d\rho\, d\phi\, d\theta$$

(المُكامل غير معطى).

c) للحصول على معادلة الكرة في الإحداثيات الكروية ، نلاحظ أنّ AOP هو دائماً مثلث قائم، وذلك من أجل أي موضع للنقطة P على الكرة. بما أنّ $AO = 2$ و $OP = \rho$ وبالتالي حسب تعريف الـ cosine نحصل على $\cos Ø = \rho/2$ أي $\rho = 2\cos Ø$

(الشكل يظهر مكان التقاطع على الكرة للمستوي الذي يحتوي على النقطة P و المحور المركزي AO.)



معادلة المستوي $z = 1$ في الإحداثيات الكروية هي $\rho \cos Ø = 1$ أو $\rho = \sec Ø$ وهو يقطع الكرة في دائرة نصف قطرها 1؛ ذلك يُظهر أنّ $\pi/4$ هي القيمة العظمى لـ Ø التي يقطع عندها الشعاع، الذي له الزاوية Ø، المنطقة.

وبالتالي الحدود هي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\sec\phi}^{2\cos\phi} d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

(المُكامل ليس معطى).

5B-2

قم بوضع مجسم نصف كروي D وبالتالي محوره المركزي يقع على طول القسم الموجب من المحور z وقاعدته تقع على المستوي xy. باستخدام مبدأ التناظر، $\bar{x}=0$ و $\bar{y}=0$ ، وبالتالي نحن نحتاج فقط إلى $\bar{z}$. تكامله هو حاصل ضرب ثلاثة تكاملات أحادية المتغير منفصلة، بما أنّ المُكامل هو حاصل ضرب ثلاثة دوال أحادية المتغير وكل حدود التكامل ثوابت.

المركبة $\bar{z}$ لعزم القوة =

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)_0^a\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\phi\right)_0^{\pi/2} = 2\pi\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}.$$

بما أنّ الكتلة تساوي

$$\frac{2}{3}\pi a^3,$$

وبالتالي سنحصل نهاية الأمر على

$$\bar{z} = \frac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3} = \frac{3}{8}a.$$

5B-3

قم بوضع المجسم بحيث تكون قمته في مبدأ الإحداثيات، ومحوره المركزي يقع على طول القسم الموجب من المحور z. الكثافة في الإحداثيات الكروية تعطى بـ $\delta = z = \rho\cos\phi$ وبالنظر إلى الشكل، نحصل على:

عزم العطالة =

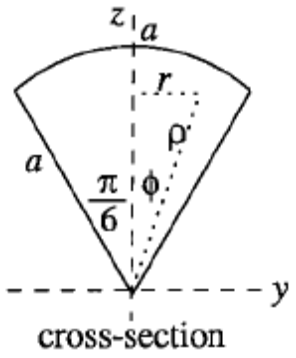
$$\iiint_D r^2 \cdot z \, dV$$

$$\iiint_D (\rho \sin\phi)^2 (\rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^a \rho^5 \sin^3\phi \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$2\pi \cdot \frac{a^6}{6} \cdot \frac{1}{4} \sin^4\phi \Big]_0^{\pi/6} =$$

$$2\pi \cdot \frac{a^6}{6} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\pi a^6}{2^6 \cdot 3}. =$$



5B-4

قم بوضع الكرة بحيث يكون مركزها في مبدأ الإحداثيات. في كل حالة، يمكن التعبير عن التكامل المتتابع كحاصل ضرب ثلاثة تكاملات أحادية (والتي يمكن حسابها بسهولة)، بما أن المكامل يساوي حاصل ضرب ثلاثة دوال ذات متغير واحد وحدود التكامل ثابتة.

(a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} a^4 = \pi a^4;$$

المتوسط = $\frac{\pi a^4}{4\pi a^3/3} = \frac{3a}{4}$.

b) قم باستخدام المحور z كقطر.

المسافة للنقطة من المحور z تساوي r=ρ sin Ø

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho\sin\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi^2 a^4}{4};$$

المتوسط =

$$\frac{3\pi a}{16} = \frac{\pi^2 a^4/4}{4\pi a^3/3}.$$

c) استخدم المستوي xy والمجسم نصف الكروي العلوي. المسافة هي z=ρ cos Ø

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho\cos\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi a^4}{4};$$

المتوسط =

$$\frac{3a}{8} = \frac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3}.$$

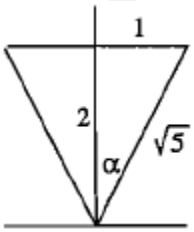
5C- الجاذبية الأرضية

5C-2

قمة المخروط تعطى بالمعادلة $z = 2$ ؛ في الإحداثيات الكروية: $\rho \cos \emptyset = 2$

لتكن α هي الزاوية بين محور المخروط وأي مولد من مولدات المخروط. الكثافة $\delta = 1$. بما أنّ المخروط متناظر حول محوره، القوة لها فقط المركبة k وهي

$$G \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{2/\cos\phi} \sin\phi \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$



التكامل الداخلي:

$$\frac{2}{\cos\phi} \sin\phi \cos\phi$$

التكامل الأوسط:

$$-2\cos\phi \Big]_0^{\alpha} = -2\cos\alpha + 2$$

التكامل الخارجي:

$$2\pi \cdot 2(1 - \cos\alpha)$$

الإجابة:

$$4\pi G\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

5C-3

قم بوضع الكرة كما في الشكل بحيث تكون Q عند مبدأ الإحداثيات. بما أنها متناظرة دورانياً حول المحور z ، القوة ستكون بالاتجاه k.

معادلة الكرة:

$$\rho = 2\cos \text{Ø}$$

الكثافة:

$$\delta = \rho^{-1/2}$$

$$F_z = G\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi} \rho^{-1/2}\cos\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

التكامل الداخلي:

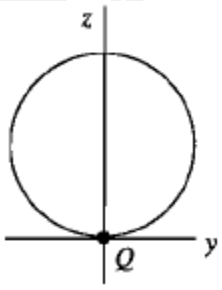
$$\cos\phi\sin\phi\ 2\rho^{1/2}\Big]_0^{2\cos\phi} = 2\sqrt{2}\ \cos^{3/2}\phi\ \sin\phi$$

التكامل الأوسط:

$$2\sqrt{2}\left[-\frac{2}{5}\cos^{5/2}\phi\right]_0^{\pi/2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

التكامل الخارجي:

$$2\pi G\frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi G.$$

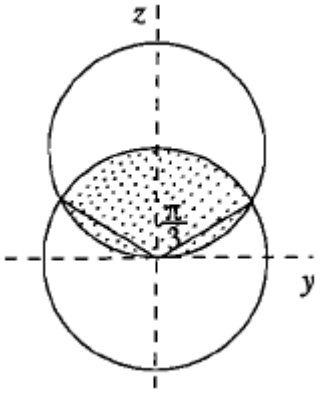


5C-4

بالعودة إلى الشكل، الجاذبية (والتي هي بالاتجاه k، باستخدام التناظر الدوراني) هي حاصل جمع تكاملين.

$$G\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1}\cos\phi\ \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad + \quad G\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\cos\phi\ \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi G \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\pi G \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}\pi G + \frac{1}{6}\pi G = \frac{11}{12}\pi G$$



الكرتان تظهران متقاطعتين في الشكل. الكرتان تتقاطعان في النقاط اللتي يكون عندها Ø = π/3

التكامل الأول يمثل الجاذبية للقسم الأعلى من المجسم، المحدود من الأسفل بالمخروط Ø = π/3 ومن الأعلى بالكرة ρ = 1.

التكامل الثاني يمثل الجزء السفلي من المجسم، والمحدود من الأسفل بالكرة ρ = cos Ø ومن الأعلى بالمخروط.