حل الواجب المنزلي 01-المحاضرة 02

السؤال 1

(أ) يرمز للأرباح من تذكرة يانصيب واحدة بـ L.

تدفع تذكرة يانصيب واحدة 1,000,000 دولار مع احتمالية 1/1,000,000، وتدفع 10,000 دولار مع احتمالية 1/10,000، وتدفع 1 دولار مع احتمالية 1/100.

لذا، القيمة المتوقعة للأرباح من تذكرة يانصيب واحدة تساوي

$$E[L] = \frac{1}{10,000,000}.1,000,000 + \frac{1}{10,000}.10,000 + \frac{1}{100}.1$$
$$= 2.01.$$

(ب) تباين الأرباح من تذكرة يانصيب واحدة يساوي

$$Var(L) = E[L^2] - E[L]^2$$

$$= \frac{1}{10,000}.(1,000,000)^2 + \frac{1}{10,000}.(10,000)^2 + \frac{1}{100}.(1)^2$$
$$- (2.01)^2 \approx 1,009,995.97.$$

(ت)

النقاش التالي يرتكز على حقيقة أن المشتري المحتمل لتذكرة اليانصيب كاره للمخاطرة أو محايد للمخاطرة.

إذا كانت كلفة التذكرة 4 دولار، فإن كلفتها أعلى من الأرباح المتوقعة. في هذه الحالة، شخص كاره للمخاطرة أو حيادي للمخاطرة لن يشتري التذكرة.

إذا كانت كلفة التذكرة 1 دولار، فإن كلفتها أقل من المكاسب المتوقعة. إذا كان أحدهم حيادي المخاطرة أو مجرد كاره للمخاطرة بشكل ضعيف جداً، فعلى هذا الشخص أن يشتري التذكرة. من ناحية أخرى، إذا كان الشخص كاره للمخاطرة بشدة، عليه ألا يشتري التذكرة.

السؤال 2

(أ) يدل على سند الولايات المتحدة بـ US. يقوم بدفع 100 دولار مع احتمالية 1. لذا،

$$E[US] = 1.100 = 100.$$

يشار إلى سند نيويورك بـ NY. يقوم بدفع 100 دولار مع احتمالية 5.=+05.+15.+3. ، ويدفع 80 دولار مع احتمالية 3.=1.+1.+1.، ويدفع 20 دولار مع احتمالية 2.=1.+05.+05. لذا،

$$E[NY] = .5.\ 100 + .3.\ 80 + .2.\ 20 = 78.$$

يشار إلى سند كاليفورنيا بـ CA. يقوم بدفع 100 دولار مع احتمالية 45.=05.+1.+3. ، ويدفع 80 دولار مع احتمالية 3.=05.+1.+15. ، ويدفع 20 دولار مع احتمالية 25.=1.+1.+05. لذا،

$$E[CA] = .45.\ 100 + .3.\ 80 + .25.\ 20 = 74.$$

(ب) بما أن سند الولايات المتحدة يقوم بدفع مبلغ ثابت بشكل مؤكد، فإن تباينها يساوي 0 دولار.

تباين سند NY يساوي

$$\begin{aligned} Var(NY) &= E[NY^2] - E[NY]^2 \\ &= .5.\ (100)^2 + .3.(80)^2 + .2.(20)^2 - (78)^2 \\ &= 916. \end{aligned}$$

تباين سند CA يساوي

$$\begin{aligned} Var(CA) &= E[CA^2] - E[CA]^2 \\ &= .45.\ (100)^2 + .3.(80)^2 + .25.(20)^2 \\ &\quad - (74)^2 = 1{,}044. \end{aligned}$$

(ت) بما أن تباين سند US هو صفر، فإن انحرافه المعياري يساوي صفر أيضاً.

الانحراف المعياري لسند NY يساوي

$$Std(NY) = \sqrt{Var(NY)} = \sqrt{916} \approx 30.27.$$

الانحراف المعياري لسند CA يساوي

$$Std(CA) = \sqrt{Var(CA)} = \sqrt{1.044} \approx 32.31.$$

(ث) تغاير سند NY وسند CA يساوي

$$Cov(NY, CA) = E[NY.CA] - E[NY]E[CA]$$

= .3. 100. 100 + .15. 100. 80 + .05. 100. 20

+.1. 80. 100 + .1. 80. 80 + .1. 80. 20

+.05. 20. 100 + .05. 20. 80 + .1. 20. 20 – 78. 74

= 348.

(ج)ارتباط سند NY وسند CA يساوي

$$Corr(NY, CA) = \frac{Cov(NY, CA)}{Std(NY).Std(CA)} = \frac{348}{30.27.\ 32.31} \approx 0.3558.$$

(ح)المتحول العشوائي للفائدة هو 1/3 • A + 1/3 • B + 1/3 • C.

القيمة المتوقعة لهذا المتحول العشوائي هي

E[1/3.US+1/3.NY+1/3.CA]=1/3.E[US]+1/3.E[NY]+1/3.E[CA]

=1/3. 100+1/3. 78+1/3. 74=84.

لحساب التباين لـ 1/3 • A + 1/3 • B + 1/3 • C. ، لاحظ أن

Var(1/3. US+1/3. NY+1/3. CA) = *Var*(1/3. NY+1/3. CA),

بما أن 5A. ثابت. فهي تتبع ذلك

Var(1/3. US+1/3. NY+1/3. CA) = *Var*(1/3. NY+1/3. CA)

= *Var*(1/3. NY)+*Var*(1/3. CA)+2. *Cov*(1/3. NY,1/3. CA)

= $(1/3)^2$*Var*(NY)+$(1/3)^2$*Var*(C)+2. 1/3. 1/3. *Cov*(B,C)

= (1/3)2. 916+(.25)2. 1,044+2. 1/3. 1/3. 348≈ 295.11.

السؤال 3

أ)

w = 0.75:

$E[r_P] = E[0.75.\ r_A + 0.25.\ r_B] = 0.75.\ E[r_A] + 0.25.\ E[r_B]$

$= 0.75.\ 0.1 + 0.25.\ 0.05 = 0.0875 = 8.75\%.$

$Var(r_P) = Var(0.75.\ r_A + 0.25.\ r_B)$

$= (0.75)^2.\ Var(r_A) + (0.25)^2.\ Var(r_B) + 2.\ 0.75.\ 0.25.\ Corr(r_A, r_B).\ Std(r_A).\ Std(r_B)$

$= (0.75)^2.(0.2)^2 + (0.25)^2.(0.15)^2 + 2.\ 0.75.\ 0.25.\ 0.5.\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0295.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0295} \approx 0.1718 = 17.18\%$$

w=0.5:

$$E[r_p] = E[0.5.r_A + 0.5.r_B] = 0.5.E[r_A] + 0.5.E[r_B]$$

$$= 0.5.\ 0.1 + 0.5.\ 0.05 = 0.075 = 7.5\%$$

$$Var(r_P) = Var(0.5.r_A + 0.5.r_B)$$

$$= (0.5)^2.Var(r_A) + (0.5)^2.Var(r_B) + 2.\ 0.5.\ 0.5.\ Corr(r_A, r_B).\ Std(r_A).Std(r_B)$$

$= (0.5)^2.(0.2)^2 + (0.5)^2.(0.15)^2 + 2.\ 0.5.\ 0.5.\ 0.5.\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0231.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0231} \approx 0.152 = 15.2\%$$

w=0.25:

$$E[r_p] = E[0.25.r_A + 0.75.r_B] = 0.25.E[r_A] + 0.75.E[r_B]$$

$$= 0.25.\ 0.1 + 0.75.\ 0.05 = 0.0625 = 6.25\%$$

$$Var(r_P) = Var(0.25.r_A + 0.75.r_B)$$

$= (0.25)^2.Var(r_A) + (0.75)^2.Var(r_B) + 2.\ 0.25.\ 0.75.\ Corr(r_A, r_B).\ Std(r_A).Std(r_B)$

$= (0.25)^2.(0.2)^2 + (0.75)^2.(0.15)^2 + 2.\ 0.25.\ 0.75.\ 0.5.\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0208.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0208} \approx 0.1422 = 14.22\%$$

بالخلاصة

الوزن	العائد المتوقع	الانحراف المعياري العائد
W=0.75	8.75%	17.18%
W=0.50	7.50%	15.20%
W=0.25	6.25%	14.22%

(ب) العائد المتوقع لكل من المحافظ الثلاث لا يتأثر بتغير الارتباط بين الأصول A و B. لذا من الضروري فقط إعادة حساب الانحراف المعياري العائد لكل من المحافظ الثلاث.

w=0.75:

$Var(r_P) = Var(0.75.\ r_A + 0.25.\ r_B)$

$=(0.75)^2.\ Var(r_A) + (0.25)^2\ .\ Var(r_B) + 2.\ 0.75.\ 0.25.\ Corr(r_A,r_B).\ Std(r_A).\ Std(r_B)$

$= (0.75)^2.(0.2)^2+(0.25)^2.(0.15)^2+2.\ 0.75.\ 0.25.\ (-0.5).\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0183.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0183} \approx 0.1353 = 13.53\%$$

w=0.5:

$$Var(r_P) = Var(0.5.r_A + 0.5.r_B)$$

$$= (0.5)^2.Var(r_A) + (0.5)^2.Var(r_B) + 2.\ 0.5.\ 0.5.\ Corr(r_A, r_B).\ Std(r_A).Std(r_B)$$

$= (0.5)^2.(0.2)^2 + (0.5)^2.(0.15)^2 + 2.\ 0.5.\ 0.5.\ (-0.5).\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0081.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0081} \approx 0.09 = 9\%$$

w=0.25:

$$Var(r_P) = Var(0.25.r_A + 0.75.r_B)$$

$$= (0.25)^2.Var(r_A) + (0.75)^2.Var(r_B) + 2.\ 0.25.\ 0.75.\ Corr(r_A, r_B).\ Std(r_A).Std(r_B)$$

$= (0.25)^2.(0.2)^2 + (0.75)^2.(0.15)^2 + 2.\ 0.25.\ 0.75.\ (-0.5).\ 0.2.\ 0.15 \approx 0.0095.$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \approx \sqrt{0.0095} \approx 0.0975 = 9.75\%$$

بالخلاصة،

الوزن	العائد المتوقع	الانحراف المعياري العائد
W=0.75	8.75%	13.53%
W=0.50	7.50%	9.00%
W=0.25	6.25%	9.75%

لاحظ الخاصيتين التاليتين:

- الأصلان الاثنان المستخدمان لبناء كل من المحافظ أعلاه لهما انحراف معياري 20% و15%. من جهة أخرى، هناك محافظ متعددة لها انحراف معياري أقل من الانحراف المعياري لكتلتي البناء. هذا من مظاهر مبدأ التوزيع.

- لكل من أوزان المحافظ الثلاث، الانحراف المعياري العائد لـ -0.5 ارتباط هو أقل تماماً من الانحراف المعياري لارتباط 0.5. هذا من مظاهر مبدأ أن الارتباط الأقل يعطي منافع تنويع، والذي تستمر فقط طالما أوزان المحفظة تقع بين 0 و1، وهي كلها في هذه المسألة.