حل الواجب المنزلي 01- المحاضرة 03

السؤال الأول

الإطاران $\{A\}$ و $\{B\}$ متطابقان في اللحظة الابتدائية. يتم تدوير الإطار $\{B\}$ حول $\hat{Y}_B$ بزاوية θ ومن ثم حول $\hat{Z}_B$ الجديد بزاوية $\emptyset$. حدد مصفوفة الدوران الثلاثية [3x3] ${}^A_BR$ التي تقوم بتحويل إحداثيات شعاع الموقع ${}^BP$ المُعرفة في الإطار $\{B\}$ إلى ${}^AP$ المُعرفة في الإطار $\{A\}$.

لنعتبر الإطار الوسيط $\{M\}$ الذي ينتج عن الدوران الأول:

$$ {}^A_BR = {}^A_MR\,{}^M_BR $$

بالتالي يكون تحويل الإطار من $\{A\}$ إلى $\{M\}$، والتّحويل من $\{M\}$ إلى $\{B\}$ هما تماماً التحويلين اللذين ذكرا في نص السؤال، لذا نعلم الآن أن:

$$ {}^A_MR = R_Y(\theta)\ and\ {}^M_BR = R_Z(\emptyset) $$

وبالتالي:

$$ {}^A_BR = R_Y(\theta)R_Z(\emptyset) $$

في الحقيقة، هذا هو تمثيل زوايا أويلر $Z-Y$ للإطار $\{B\}$ بالنسبة للإطار $\{A\}$.

ونتيجة ذلك نكتب:

$$ {}^A_BR = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c\theta & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & -c\theta s\varphi & s\theta \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ -s\theta c\varphi & s\theta s\varphi & c\theta \end{bmatrix} $$

السؤال الثاني

لدينا إطار وحيد معطى $\{A\}$ وشعاع الموقع ^{A}P المُعرّف في هذا الإطار. نقوم بتحويل ^{A}P من خلال تدويره في البداية حول $\hat{Z}_A$ بزاوية $\emptyset$ ومن ثم تدويره حول $\hat{Y}_A$ بزاوية θ . حدد مؤثر مصفوفة الدوران الثلاثية 3×3 ,$R(\emptyset,\theta)$ الذي يصف هذا التحويل.

لنفترض أن الدوران الأول يحول $^{A}\mathbf{P} \rightarrow {}^{A}\mathbf{P}'$ والدوران الثاني يحول $^{A}\mathbf{P}' \rightarrow {}^{A}\mathbf{P}''$، بالتالي يُصبح لدينا:

$$^{A}\mathbf{P}' = R_Z(\emptyset)\,{}^{A}\mathbf{P}$$

$$^{A}\mathbf{P}'' = R_y(\theta)\,{}^{A}\mathbf{P}'$$

$$\Rightarrow {}^{A}\mathbf{P}'' = R_y\, R_z(\emptyset)\,{}^{A}\mathbf{P}$$

ينتج عن ذلك:

$$R(\emptyset,\theta) = R_y(\theta)R_Z(\emptyset)$$

هذه المصفوفة نفسها التي وردت في السؤال الأول، وهذا الانزياح يكافئ رياضياً تحويل الإطار باستخدام تمثيل زوايا أويلر $Z - Y$.

السؤال الثالث

(a) لدينا مصفوفة التحويل التالية:

$$^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 2 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $^{B}_{A}T$.

عبر استخدام المُعادلة (1.26) في الصفحة 20 من ملف المحاضرة، نحصل على ما يلي:

$$ {}_{A}^{B}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & c\theta & s\theta & -2c\theta - 3s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta & 2s\theta - 3c\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

(b) لتكن $\boldsymbol{\theta = 45^0}$ و

$$ {}^{B}\boldsymbol{P} = [\,\mathbf{4} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{6}\,]^{T} $$

احسب $\boldsymbol{{}^{A}P}$.

$$ {}^{A}P = [\,3 \quad 4.24 \quad 0\,]^{T} $$

السؤال الرابع

لتكن المصفوفة الثلاثية التالية:

$$ R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} $$

(a) أثبت أنها مصفوفة دوران.

يُمكن إثبات ذلك من خلال العلاقة $I = R^{T}R$، حيث إن I هي المصفوفة الواحدية.

$$ R^{T}R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} $$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) أوجد شعاعاً واحدياً يحدد محور الدوران وزاوية الدوران بالدرجات.

طبّق المُعادلات (1.52) و (1.53) في الصفحات 35-34 من ملخص المحاضرة؛ لتحصل على:

$$angle = 62.8^0$$

$$axis = [-0.679 \quad 0.679 \quad -0.281]^T$$

(c) ما هي معاملات أويلر $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ لـ R.

طبّق المُعادلات (1.57 -1.54) في الصفحات 35-34 من ملخص المحاضرة، فينتج ما يلي:

$$\varepsilon_1 = -0.354 \quad \varepsilon_2 = 0.354 \quad \varepsilon_3 = -0.146 \quad \varepsilon_4 = 0.854$$