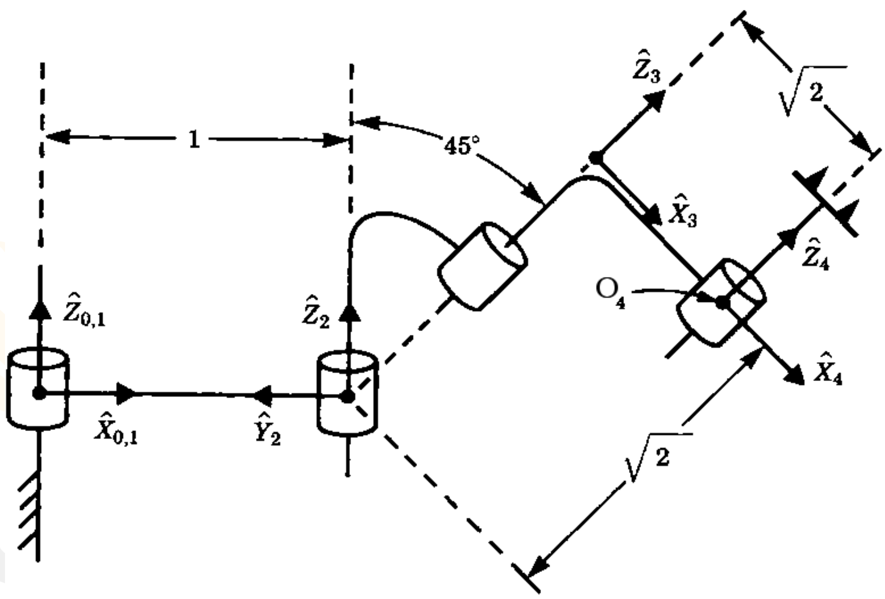
حل الواجب المنزلي 04- المحاضرة 08-10

السؤال الأول:

ليكن لدينا المُخطط المبين أدناه لذراع مفاصلها: (دوراني، دوراني، دوراني، دوراني).



ولهذه الذراع: مصفوفة الحركة الأمامية ومصفوفة اليعقوبي الدورانية الآتيتان:

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_{12}c_{34} - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{12}s_{34} & -c_{12}s_{34} - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{12}c_{34} & \frac{\sqrt{2}}{2}s_{12} & \sqrt{2}c_{12}c_3 - s_{12}(s_3 - 1) + c_1 \\ s_{12}c_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2}c_{12}s_{34} & -s_{12}s_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2}c_{12}c_{34} & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{12} & \sqrt{2}s_{12}c_3 - c_{12}(s_3 - 1) + s_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s_{34} & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{34} & \frac{\sqrt{2}}{2} & s_3 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}J_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

(a) أوجد مصفوفة اليعقوبي الأساسية J_0 في الإطار $\{\mathbf{0}\}$ للموقع $\mathbf{q} = [0, 90^{\circ}, -90^{\circ}, 0]^T$، حيث q شعاع متغيرات المفصل.

تعطي العلاقة الآتية مصفوفة اليعقوبي الخطية:

$$
{}^{0}J_{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{0}\mathbf{P}_e}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^{0}\mathbf{P}_e}{\partial q_2} & \frac{\partial {}^{0}\mathbf{P}_e}{\partial q_3} & \frac{\partial {}^{0}\mathbf{P}_e}{\partial q_4} \end{bmatrix}
$$

حيث إن ${}^{0}\mathbf{P}_e$ هي العمود الرابع لـ ${}^{0}_{4}T$، ومن ثم:

$$
{}^{0}J_{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}s_{12}c_3 - c_{12}(s_3 - 1) - s_1 & -\sqrt{2}s_{12}c_3 - c_{12}(s_3 - 1) & -\sqrt{2}c_{12}s3 - s_{12}c_3 & 0 \\ \sqrt{2}c_{12}c_3 - s12(s_3 - 1) + c1 & -\sqrt{2}c_{12}c_3 - s_{12}(s_3 - 1) & -\sqrt{2}s_{12}s3 + c_{12}c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \end{bmatrix}
$$

نعوض فيها $\mathbf{q} = [0, 90^{\circ}, -90^{\circ}, 0]^{\mathrm{T}}$ ونضمها مع المصفوفة ${}^{0}J_{\omega}$ المعطاة إلينا مباشرةً؛ لنحصل على المصفوفة:

$$
{}^{0}J_{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

(b) يُطبق شعاع قوة عامة على مبدأ الإطار $\{4\}$ ويُعطى قياسه في الإطار $\{4\}$ ليكون$[0,6,0,7,0,8]^T$. للموضع المعطى في الطلب السابق من المسألة. حدِّد عزوم دوران المفصل التي تجعله يتوازن في وضع السكون.

لدينا شعاع قوة/عزم $\mathbf{F}_{app}$ بأبعاد $6x1$ مطبق على الروبوت، إذا كانت الذراع متوازنة تحت تأثير عزم الدوران في حالة السكون، فسنكون قد علمنا أن الروبوت يطبق شعاع قوة/عزم مساويًا ومعاكسًا العزم المطبق على مبدأ الإطار $\{4\}$ (حسب قوانين نيوتن الأساسية في الفيزياء).

لذا نعلم أنه في إحداثيات الإطار $\{4\}$ تتحقق المساواة: ${}^4\mathbf{F}_{app}$ $-$ $= {}^4\mathbf{F}_4$ وينبغي لنا إيجاد عزم دوران المفصل $\boldsymbol{\tau}$ الموافق ${}^4\mathbf{F}_4$.

لا تنسَ أن $\tau = J^T F$. لضرب F و J ينبغي لهما أن يكونا في الإطار نفسه.

يمكنك: إما تحويل J من الإطار $\{0\}$ إلى $\{4\}$، وإما تحويل F من الإطار $\{4\}$ إلى $\{0\}$، وكلاهما يعطي النتيجة نفسها:

$${}^4\mathbf{F}_4 = -\ {}^4\mathbf{F}_{app} = -[0 \quad 6 \quad 0 \quad 7 \quad 0 \quad 8]^T$$

$${}^0\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} {}^0_4R & 0 \\ 0 & {}^0_4R \end{bmatrix} {}^4\mathbf{F}_4$$

$$\tau = {}^0J^{T0}\mathbf{F}_4$$

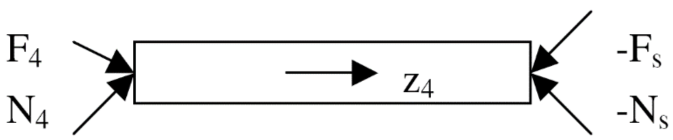
الجواب النهائي:

$$\boxed{\tau = -[18.707, 12.707, 16.485, 8.0]^t}$$

(c) وفق الوضعية السابقة للروبوت في الطلب السابق، لدينا القيم السابقة نفسها، وبفرض إمساك مفك من خلال المؤثر الطرفي، حيث إن نهايته موازية $\hat{Z}_4$ بعد 9 وحدات طول من مبدأ الإطار $\{4\}$، ما القوة وعزم الدوران الذي تُطبقه نهاية المؤثر الطرفي عندما يُطبق عزم دوران المفصل الذي حُدِّد في الفقرة b؟

لنُلقِ نظرة على مخطط الجسم الحر للمفك. النهاية اليسرى عند مبدأ الإطار 0_4 ونهاية المفك إلى اليمين.

<u>**ملاحظة:**</u> في هذا المخطط نعتبر وجود 3x1 أشعة قوة وعزم، حيث إن "F" تُمثل قوة خطية أبعادها 3x1



لا شعاعًا مركبًا أبعاده 6x1.

ينبغي لنا أولاً اختيار مبدأ إحداثيات لحساباتنا، ومن ثم تطبيق حالة التوازن السكوني.

يكون اختيار المبدأ اعتباطياً، وينبغي لنا الوصول إلى الجواب نفسه.

توجد نقطتان يمكننا اختيارهما هنا، هما: مبدأ الإطار $\{4\}$، أو نهاية المفك $\{S\}$.

لنستخدم مبدأ الإطار $\{4\}$، للتبسيط سنُمثّل جميع أشعتنا باستخدام إحداثيات الإطار $\{4\}$.

في حالة التوازن الساكن نعلم أن: $\Sigma\mathbf{N} = 0$ و $\Sigma\mathbf{F} = 0$ وهذا يعطينا:

$$\mathbf{F}_4 + (-\mathbf{F}_s) = \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_s = \mathbf{F}_4$$

$$\mathbf{N}_4 + (-\mathbf{N}_s) + \mathbf{P}_{s4} \times (-\mathbf{F}_s) = \mathbf{0} \implies \mathbf{N}_s = \mathbf{N}_4 + {}^4\mathbf{P}_s \times (-\mathbf{F}_s)$$

الموضع $^4\mathbf{P}_s$ هو شعاع الموقع لمبدأ الإطار $\{4\}$ للنهاية، لذا نعلم أن $^4\mathbf{P}_s = [0,0,9]^T$.

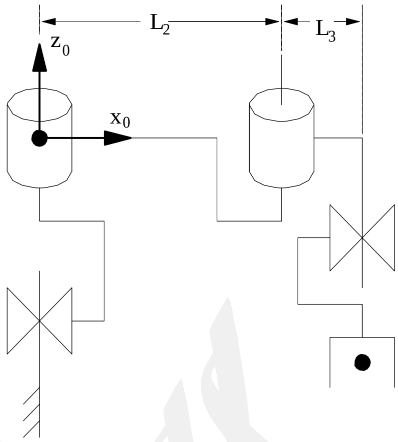
وفي الوقت نفسه لدينا من الفقرة b: $\mathbf{F}_4 = -[0,6,0]^T$ و $\mathbf{N}_4 = -[7,0,8]^T$.

إذا حللنا من أجل $\mathbf{F}_s$ (باستخدام المعادلة العليا) أمكننا استخدام هذه القيمة لحل $\mathbf{N}_s$ في المعادلة أدناه، ومن ثم:

$$^4F_s = -[0,6,0]^T$$

$$^4N_s = -[61,0,8]^T$$

السؤال الثاني:

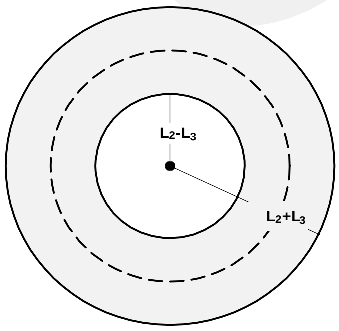


ليكن لدينا المُخطط المبين أدناه لذراع مفاصلها: انسحابي، دوراني، دوراني، انسحابي.

(a) لنفترض أن لا حدود للمفاصل، ارسم مساحة العمل لهذه الذراع.

تأكَّدْ من كتابة الأبعاد في الرسم، وافترضْ أن $L2 > L3$.

بما أن المفاصل الانسحابية لا حدود لها، فمساحة العمل أسطوانة لا نهائية الطول في الاتجاه Z_0. يُوضح



الشكل الآتي مقطعاً عرضياً لمساحة العمل.

(b) صِفْ مساحة العمل الفاعلة ثلاثية الأبعاد (3D) لهذه الذراع.

هذه الذراع يمكنها توجيه مؤثرها الطرفي للأسفل فقط؛ لذا ليس هناك نقاط يمكنها توجيهها في اتجاه اعتباطي ما، ولو عددنا الاتجاه فقط بالنسبة إلى المستوي $(X0, Y0)$ (مثاله الزاوية مع المحور X_0)، فيكون لدينا مفصلان فقط للتحكم بالموقع في المستوي، ولن تبقى أي درجة حرية للتحكم بالاتجاه، لذا منطقة العمل الفاعلة تُمثل فراغًا صفريًا.

(c) لنفترض أن لا حدود للمفصل، ويهمنا فقط موقع المؤثر الطرفي، ما عدد الحلول الممكنة للحركة العكسية (في الحالة العامة)؟ اشرح ذلك في اختصار.

إذا وُجد توضّع للمفاصل في هذه الذراع الآلية بحيث يضع المؤثر الطرفي في موقع معين، أمكننا الحصول على الموقع نفسه من خلال تقصير مفصل انسحابي واحد، وتمديد الآخر بقيمة ما Δ.

تمتلك هذه الذراع فائضاً في الاتجاه Z_0، لذا هناك عدد غير منتهٍ من حلول التحريك العكسي.

(d) لنفترض أننا أزلنا المفصل الانسحابي الأول بحيث يصبح المفصل الدوراني يدور حول القاعدة.

أعِدْ حل الفقرة (c) لذراع مفاصلها: دوراني، دوراني، انسحابي.

إذا أزلنا أحد المفاصل الانسحابية فلن تكون الذراع ذات فائض، ولأي نقطة (x, y, z) يتحدد امتداد المفصل الانسحابي تمامًا من خلال z.

في المستوي $(X0, Y0)$ قيمتان لزوايا المفصل الدوراني تحقق قيم (x, y) المعطاة: المرفق للأعلى، المرفق للأسفل؛ لذا هناك حلان للدراسة الحركية العكسية لموقع مُعطى.

(e) تخيَّل أننا أجرينا تعديلاً آخر على الذراع إضافةً إلى التعديل في الفقرة d، وذلك بإدخال مفصل دوراني آخر بين المفصلين الدورانيين الموجودين مسبقاً؛ حيث إن محوره يتجه في اتجاه المفصلين الآخرين نفسه.

أعِدْ حلَّ الفقرة (c) لذراع مفاصلها: دوراني، دوراني، دوراني، انسحابي.

بالمقارنة مع الفقرة d، يصير المستوي $(X0, Y0)$ ذا فائض بالنسبة إلى الذراع.

ولموقع مستوٍ معطى (x, y) هناك ثلاثة مفاصل دورانية لمتحولي موضع (مثلاً x و y)؛ لذا هناك عدد غير منتهٍ من زوايا المفصل يمكنها تحقيق ذلك، أي إن هنالك عددًا غير منتهٍ من حلول الدراسة الحركية العكسية.

السؤال الثالث:

نرغب في تحريك مفصل وحيد من θ_0 إلى θ_f يبدأ وينتهي في وضع الراحة في الزمن t_f.

قيم θ_0 و θ_f معطاة، لكن نريد حساب t_f بحيث إن القيود كالآتي:

$$|\dot{\theta}(t)| < \dot{\theta}_{max} \text{ و } |\ddot{\theta}(t)| < \ddot{\theta}_{max}$$

وذلك لجميع قيم t حيث: $\dot{\theta}_{max}$ و $\ddot{\theta}_{max}$ لهما قيم ثوابت موجبة.

(a) مستخدماً مقطعاً تكعيبياً وحيدًا اكتبْ معادلات المعاملات التكعيبية (من الدرجة الثالثة) بدلالة a_i θ_0، θ_f و t_f.

يمكن الحصول على هذا الحل من المحاضرات أو من الكتاب المقرر.

الجواب الطويل على النحو الآتي: لكثير الحدود التكعيبي (من الدرجة الثالثة):

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

لدينا:

$$\theta(0) = a_0 = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = a_0 + a_{1tf} + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(0) = a_1 = 0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^3 = 0$$

على أساس أن t_f ثابت، تؤول المعادلات السابقة إلى نظامٍ خطيّ بأربع معادلات وأربعة مجاهيل (ai) يُمكن حلّها بقليلٍ من الجبر بسهولة للحصول على الآتي:

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$
$$a_3 = \frac{-2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}$$

(b) باستخدام قيود السرعة $|\dot{\theta}(t)| < \dot{\theta}_{max}$، اشتقَّ شرطاً لـ t_f بدلالة θ_0, θ_f و$\dot{\theta}_{max}$.

ماذا نقول عن $|\dot{\theta}(t)|$على فترة زمنية $[0, t_f]$ ؟

نعلم أولاً أن $\dot{\theta}(t) = \theta(t_f) = 0$ لذا $|\dot{\theta}(t)|$ ينبغي لها أن تكون ذات قيمة عظمى (في الفترة الزمنية $[0, t_f]$) عندما تكون $\ddot{\theta}(t) = 0$. هذه مسألة قيم قصوى من مقرر التحليل الرياضي في السنة الأولى، ينبغي لنا إيجاد علاقة من أجل $\ddot{\theta}(t) = 0$.

كثير الحدود $\theta(t)$ معطى من الفقرة **a** :

$$\theta(t) = \theta_f + \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} t^2 - \frac{2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3} t^3$$

بأخذ المشتق الأول نحصل على:

$$\dot{\theta}(t) = \theta_f + \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} t - \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3} t^2$$

والمشتق الثاني يكون:

$$\ddot{\theta}(t) = \theta_f + \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} - \frac{12(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3} t$$

إن جعل $\ddot{\theta}(t) = 0$ يعطي $t = t_f/2$ كحل منطقي جداً، فالسرعة تربيعية، ولها قيمة مساوية عند نقطة النهاية للفترة

الزمنية؛ لذا هي قيمة قصوى عند منتصف الفترة الزمنية، ونعلم أنه عند الفترة الزمنية $[0, t_f]$:

$$|\dot{\theta}(t)| \leq |\dot{\theta}(t_f/2)|$$

ولنتأكد من أن الشرط عند السرعة القصوى محقق ينبغي لنا أن نتأكد من الآتي:

$$\left|\dot{\theta}\left(\mathrm{tf}\frac{1}{2}\right)\right| < \dot{\theta}_{max}$$

$$\left|\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}\left(\frac{t_f}{2}\right) - \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}(t_f/2)^2\right| < \dot{\theta}_{max}$$

$$\left|\frac{3(\theta_f - \theta_0)}{2t_f}\right| < \dot{\theta}_{max}$$

$$\frac{3|\theta_f - \theta_0|}{2t_f} < \dot{\theta}_{max}$$

لذا الشرط المطلوب هو:

$$t_{f>}\frac{3|\theta_f - \theta_0|}{2\dot{\theta}_{max}}$$

(c) باستخدام قيد التسارع $|\ddot{\theta}(t)| < \ddot{\theta}_{max}$، اشتقَّ شرط t_f بدلالة $\theta_f\theta_0$, و$\ddot{\theta}_{max}$

المسألة مشابهة تماماً الفقرة b، عدا أن التسارع خطي، لذا سيبلغ قيمته العظمى عند إحدى نهايات الفترة الزمنية.

إذا عوضنا $t = 0$ و $t = t_f$ في معادلة التسارع حصلنا على:

$$\ddot{\theta}(0) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = -\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

لذا نعلم أنه في الفترة الزمنية $[0, t_f]$:

$$|\ddot{\theta}(t)| \leq= \left|\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}\right| = \frac{6|(\theta_f - \theta_0)|}{t_f^2}$$

ولنتأكد من أن الشرط عند التسارع الأعظمي محقق ينبغي لنا أن نتأكد من الآتي:

$$\frac{6|(\theta_f - \theta_0)|}{t_f^2} < \ddot{\theta}_{max}$$

لذا الشرط هو:

$$t_f > \sqrt{\frac{6|(\theta_f - \theta_0)|}{\ddot{\theta}_{max}}}$$