

المحاضرة 14

المتغيرات غير المستقلة.

عادة ما يكون علينا التعامل مع المتغيرات غير المستقلة ، مثال $f(P, V, T)$ حيث $PV = nRT$

سؤال: إذا كان $g(x, y, z) = c$ بالتالي يمكننا التفكير بأن $z = z(x, y)$.

ما هي $\partial z / \partial x$ ، $\partial z / \partial y$ ؟

مثال: $x^2 + yz + z^3 = 8$ عند $(2, 3, 1)$.

خذ المشتقة $2x dx + z dy + (y + 3z^2)dz = 0$

أي أن $4dx + dy + 6dz = 0$ (حيث يجب أن تكون $g = c$) ،

$$\text{أو } dz = -\frac{4}{6}dx - \frac{1}{6}dy$$

إذا $\partial z / \partial x = -4/6 = -2/3$ و $\partial z / \partial y = -1/6$ (نأخذ معامل dx و dy) .

أو بشكل مكافئ : إذا وضعنا y كقيمة ثابتة، عندها يمكن أن نعوض:

$$dy = 0 \text{ لنحصل على } dz = -4/6 dx$$

إذاً: $\partial z / \partial x = -4/6 = -2/3$.

بشكل عام : $g(x, y, z) = c \Rightarrow g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$

إذا ثبتنا y ، تكون $g_x dx + g_z dz = 0$

أي أن: $\partial z / \partial x = -g_x / g_z$ و $dz = -g_x / g_z dx$.

إنتبه : التدوين يمكن أن يكون خطراً! على سبيل المثال :

$$f(x, y) = x + y, \partial f / \partial x = 1$$

تبديل المتغيرات :

$$x = u, y = u + v$$

$$\text{إذا: } f = 2u + v, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 2, \quad x = u$$

$$\text{ولكن: } \frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial u} !!$$

هذا بسبب أن $\frac{\partial f}{\partial z}$ يعني تغير x وثبتت y ، في حين $\frac{\partial f}{\partial u}$ تعني تغير u وإبقاء v ثابتة؛ أي أن تغير x يبقى $y - x$ ثابت .

عندما يكون هناك غموض، يجب علينا تدقيق ما الذي يوضع كثابت:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \text{مشتق بالنسبة لـ } x \text{ عندما تكون } y \text{ ثابتة ،}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \text{مشتق بالنسبة لـ } u \text{ عندما تكون } v \text{ ثابتة .}$$

$$\text{لدينا الآن } \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_v \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

في المثال السابق حسبنا $(\partial z / \partial x)_y$. عندما لا يكون هناك أي مخاطرة للالتباس نحافظ على الترميز، بشكل عام $\partial / \partial x$ تعني تلقائياً أن y ثابتة .

مثال : مساحة مثلث ضلعين من أضلاعه a و b يشكلان زاوية θ

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta \text{ المساحة تساوي}$$

افترض أنه مثلث قائم الزاوية وأن b هو الوتر ، مع القيد: $a = b \cos \theta$

في ثلاث حالات تكون نسبة التغير في مساحة المثلث A بالنسبة لـ θ منطقية:

(1) ننظر الى $A = A(a, b, \theta)$ التي هي متغيرات مستقلة ،

تقليدياً $\frac{\partial A}{\partial \theta} = A_\theta$ (حيث a, b يكونا ثابتين). هذه الإجابة للسؤال : a, b يكونا ثابتين و θ

متغيرة ، المثلث لا يبقى مثلث قائم، ما الذي يحدث للمساحة A ؟

(2) القيد $a = b \cos \theta$ في هذه الحالة نجعل a ثابتة و θ متغيرة ، بينما b يجب أن تحقق $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a$

(3) القيد $a = b \cos \theta$ في هذه الحالة نجعل b ثابتة و θ متغيرة ، بينما a يجب أن تحقق $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_b$

على سبيل المثال كيف نحسب $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a$ ؟ [نتعامل مع A كدالة لـ a و θ في حين $b = b(a, \theta)$].

(0) التعويض : $a = b \cos \theta$ إذا $b = a \sec \theta$, $A = \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} a^2 \tan \theta$,

$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = \frac{1}{2} a^2 \sec^2 \theta$ (هذه الطريقة الأسهل لكننا لانستطيع دائماً الحل لإيجاد b).

(1) التفاضلات الكاملة : $da = 0$ (a ثابت)

$$dA = A_\theta d\theta + A_a da + A_b db = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} ab \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} b \sin \theta da + \frac{1}{2} a \sin \theta db$$

$$\text{والقيد: } da = \cos \theta db - b \sin \theta d\theta$$

نعوض: $da = 0$ فنحصل على:

$$dA = \left(\frac{1}{2} a \sin \theta b \tan \theta \right) d\theta \text{ ثم } db = b \tan \theta d\theta$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = \frac{1}{2} ab \cos \theta + \frac{1}{2} a \sin \theta b \tan \theta = \frac{1}{2} ab \sec \theta$$

(2) قاعدة السلسلة :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = A_\theta (\partial \theta / \partial \theta)_a + A_a (\partial a / \partial \theta)_a + A_b (\partial b / \partial \theta)_b = A_\theta + A_b (\partial b / \partial \theta)_a$$

سنجد $(\partial A / \partial \theta)_a$ بإستخدام القيد (لم يسعفنا الوقت هنا) .

$$\text{الإشتقاق الضمني لـ } a = b \cos \theta :$$

لدينا:

$$0 = (\partial a / \partial \theta)_a = (\partial b / \partial \theta)_a \cos \theta - b \sin \theta$$

وبالتالي : $(\partial b / \partial \theta)_a = b \tan \theta$ ، ومنه نستنتج:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a - \frac{1}{2} ab \cos \theta + \frac{1}{2} a \sin \theta b \tan \theta = \frac{1}{2} ab \sec \theta$$

الطريقتان الرياضيتان تتضمنان حساب نفس الكميات، ولو كانتا مكتوبتين بطريقة مختلفة .

