المحاضرة 26

الإحداثيات الكروية (ρ,Φ,Θ)

ρ = تلفظ روه = المسافة إلى مبدأ الإحداثيات. $\Phi = \varphi$ = phi = الزاوية مقاسة نزولاً من المحور z.

Θ = نفس الزاوية في الإحداثيات الأسطوانية.

رُسم مخطط في فضاء ثلاثي البعد، وهناك شكل ذو بعد ثنائي مقطّع إلى شرائح بواسطة مستوي عمودي بالإحداثيات z، r.

وهذه صيغ يجب عليكم تذكرها:

$$z = \rho \cos \Phi \qquad r = \rho \sin \Phi$$

وبالتالي:

$$y = \rho \sin \Phi \sin \Theta \quad x = \rho \sin \Phi \cos \Theta$$

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{(r^2 + z^2)}$$

المعادلة $\rho = a$ تعرّف كرة نصف قطرها a ومركزها عند 0.

على سطح الكرة، Φ هي شبيهة بخط العرض، ماعدا عندما تساوي الصفر عند القطب الشمالي، وهي تساوي $\pi/2$ عند خط الإستواء، وتساوي π عند القطب الجنوبي. Θ شبيهة بخط الطول.

$\Phi = \pi/4$ هو مخروط (هذا سؤال أحد الطلاب)

$\Phi = \pi/2$ و $z=r=\sqrt{(x^2 + y^2)}$ هو المستوي xy

عنصر الحجم:

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

لفهم هذه المعادلة، أولاً قم بدراسة مساحة سطح كرة نصف قطرها a: أظهر الشكل "المستطيل" المقابل لـ $\Delta\Phi$، $\Delta\Theta$، وكل ضلع من أضلاعه = جزء من دائرة نصف قطرها a، وطول كل ضلع يساوي $a\Delta\Phi$، والجزء من الدائرة التي نصف قطرها $r = a \sin\Phi$ بطول $r\,\Delta\Theta = a \sin\Phi\,\Delta\Theta$

وبالتالي

$$\Delta S \approx a^2 \sin\phi\, \Delta\phi \Delta\theta,$$

التي تعطينا عنصر السطح

$$dV = d\rho\, dS = \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$

مثال: لنسترجع المثال المعقد الذي ذكرناه في نهاية المحاضرة السابقة (حيث كانت المنطقة مقسمة بواسطة المستوي الموجود داخل كرة الوحدة). بعد تدوير نظام الإحداثيات، فالسؤال يصبح: حجم الجزء من كرة الوحدة الموجودة فوق المستوي $z = 1/\sqrt{2}$ (الصورة تظهر ذلك).

يمكن الإعداد لذلك في الإحداثيات الأسطوانية (يمكنكم فعل ذلك كتدريب لكم) أو في الإحداثيات الكروية.

من أجل قيم ثابتة لـ Φ و Θ سنقوم بتقطيع المنطقة بواسطة أشعة خارجة من مبدأ الإحداثيات بشكل شعاعي: مجال ρ من قيمتها على المستوي z=1/ √2 إلى قيمتها على الكرة ρ=1 . معادلة الإحداثيات الكروية للمستوي هي:

$$z = \rho\cos\phi = 1/\sqrt{2},$$

وبالتالي

$$\rho = \sec\phi/\sqrt{2}.$$

والحجم يساوي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec\phi}^{1} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

حدود Φ موضحة بالشريحة الناتجة من المستوي Θ = ثابت الذي يقطع المنطقة: حواف المنطقة هي عند:

$$z = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لن نقوم بالحل و لكن الجواب النهائي هو:

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6\sqrt{2}}.$$

تطبيقات الجاذبية:

قوة الجاذبية المبذولة على الكتلة m عند مبدأ الإحداثيات بواسطة الكتلة ΔM عند (x,y,z). (الشكل يبين ذلك) معطاة بالصيغة التالية :

$$|\vec{F}| = \frac{G\,\Delta M\,m}{\rho^2}$$

$$dir(\vec{F}) = \frac{\langle x,y,z\rangle}{\rho}$$

بعبارة أخرى:

$$\vec{F} = \frac{G\,\Delta M\,m}{\rho^3}\langle x,y,z\rangle$$

(G هو ثابت الجاذبية).

إذا استعضنا عن الكتلة النقطية بمجسم ذو كثافة δ، فعند ذلك يجب علينا أن نكامل مساهمات في الجاذبية للقطع الصغيرة $\Delta M = \delta\,\Delta V$ وبالتالي

$$\vec{F} = \iiint_R \frac{Gm\,\langle x,y,z\rangle}{\rho^3}\,\delta\,dV,$$

بعبارة أخرى، المركبة z هي:

$$F_z = Gm\iiint_R \frac{z}{\rho^3}\delta\,dV,\ \ldots$$

إذا أمكننا الإعداد لاستخدام التناظر، فسيمكن أيجاد قيمة F_z بسهولة باستخدام الإحداثيات الكروية.

الإعداد العام: سنقوم بوضع الكتلة m عند مبدأ الإحداثيات (فالمكامل كما في الأعلى)، كما سنقوم بوضع المجسم بحيث يكون المحور z هو محور التناظر. وبالتالي $\mathbf{F} = \langle 0,0,F_z\rangle$ بالتناظر، ويجب علينا حساب مركبة واحدة فقط. وبالتالي

$$F_z = Gm\iiint_R \frac{z}{\rho^3}\,\delta\,dV = Gm\iiint_R \frac{\rho\cos\phi}{\rho^3}\,\delta\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = Gm\iiint_R \delta\cos\phi\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

مثال. قانون نيوتن: الجاذبية لكوكب كروي ذو كثافة منتظمة δ تساوي الجاذبية لكتلة نقطية مساوية له متموضعة في مركز الكوكب.

الإعداد: الكرة التي نصف قطر يساوي a ومركزها يقع على القسم الموجب من المحور z، على تماس مع المستوي xy عند مبدأ الإحداثيات؛ وكتلة الإختبار هي m تقع عن مبدأ الإحداثيات. وبالتالي

$$F_z = Gm\iiint_R \frac{z}{\rho^3}\,\delta\,dV = Gm\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\phi} \delta\,\cos\phi\,\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \cdots = \frac{4}{3}Gm\delta\,\pi a = \frac{GMm}{a^2}$$

حيث M = كتلة الكوكب = $4/3\pi a^3\delta$ (حدود ρ و Φ يجب تحديدها بحذر، عن طريق رسم مخطط لشريحة عمودية، برسم مخطط لشريحة عمودية مع المحاور z و r كمحاور إحداثيات، والدائرة الداخلية للمثلث الأيمن الذي يقع اثنان من رؤوسه على الكرة والرأس الثالث يقع على نقطة على سطح الدائرة، وتر المثلث هو قطر الدائرة 2a وبالتالي سنحصل على $\rho=2a\cos\Phi$ كمعادلة للكرة في الإحداثيات القطبية).