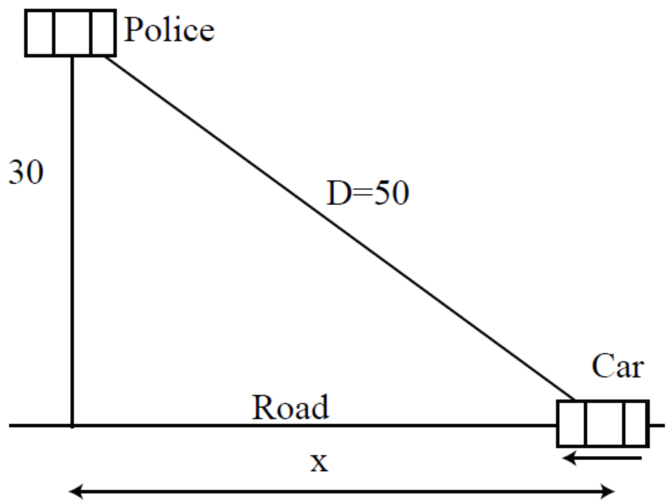
المحاضرة 12
معدلات التغير ذات الصلة

مثال 1:

تبعد الشرطة 30 قدم عن حافة الطريق. يرى رادار الشرطة سيارتك تقترب بسرعة 80 قدم في الثانية، عندما تكون سيارتك على بعد مسافة 50 قدم من جهاز الرادار. السرعة القصوى محددة بـ 65 ميل في الساعة (التي تحول إلى 95 قدم في الثانية)، فهل كنت مسرعاً؟

أولاً، ارسم مخطط للحالة (كما في الشكل 1):



الشكل 1: توضيح المثال 1: مثلث متكون من الشرطة، السيارة، الطريق، مرموز له بـD و x

ثانياً، حدد مسميات المتغيرات، المهم هو معرفة أي المتغيرات يتغير.

عند $D=50$، $x=40$، (نحن نعلم بهذا لأنه مثلث $3-4-5$ أو استخدم فيثاغورث)، إضافة إلى ذلك، $\frac{dD}{dt}=D'=-80$. D' سالب لأن السيارة تتحرك في الجهة $-x$. لا تعوض بعد قيمة D، فهي تتغير وتعتمد على x

تقول نظرية فيثاغورث:

$$30^2 + x^2 = D^2$$

اشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن (اشتقاق ضمني):

$$\frac{d}{dt}\left(30^2 + x^2 = D^2\right) \quad \Rightarrow \quad 2xx' = 2DD' \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2DD'}{2x}$$

الآن، نعوض في القيم العددية اللحظية:

$$x' = \frac{50}{40}(-80) = -100\,\frac{\text{قدم}}{\text{s}}$$

وهذا يتجاوز السرعة القصوى المحددة بـ 95 قدم في الثانية؛ أنت في الواقع تسرع،.

هنالك طريقة أخرى، مطولة، لحل هذه المسألة، إبدأ بـ :

$$D = \sqrt{30^2 + x^2} = \left(30 + x^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dt}D = \frac{1}{2}\left(30^2 + x^2\right)^{-1/2}\left(2x\frac{dx}{dt}\right)$$

قم بتعويض القيم:

$$-80 = \frac{1}{2}\left(30^2 + 40^2\right)^{-1/2}(2)(40)\frac{dx}{dt}$$

وقم بالحل لإيجاد:

$$\frac{dx}{dt} = -100\,\frac{\text{قدم}}{\text{s}}$$

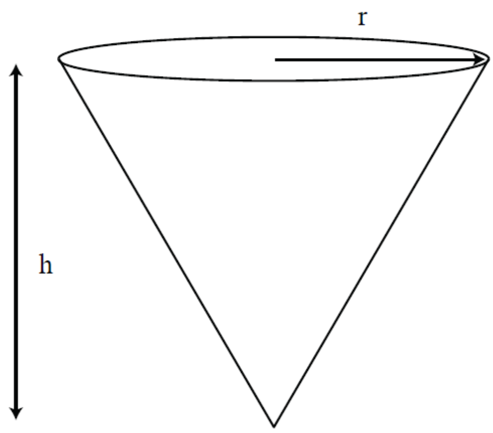
الطريقة الثالثة، هي اشتقاق ($x = \sqrt{D^2 - 30^2}$)، الأسهل اشتقاق المعادلة في شكلها الجبري المبسط $30^2 + x^2 = D^2$، كما الطريقة الأول.

الخطة العامة لخطوات هذه المسألة هي:

1. رسم الصورة، تثبيت المتغيرات والمعادلات.
2. أخذ المشتقات.
3. تعويض القيم المعطاة، لا تُعوَّض القيم إلا بعد أخذ كل المشتقات.

مثال 2:

نعتبر وعاء مخروطي، نصف قطره في الأعلى هو 4 أقدام، وارتفاعه 10 أقدام، يُملأ بالماء بمعدل 2 قدم مربع في الدقيقة، بأي سرعة يصعد مستوى الماء عندما يكون على ارتفاع 5 أقدام؟.

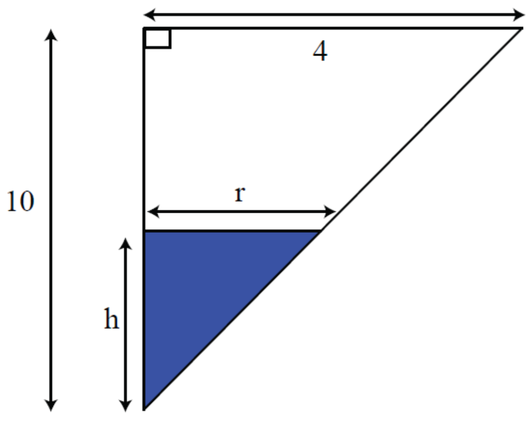


الشكل 2: توضيح المثال 2: مخروط وعاء المياه مقلوب

من الشكل 2، يعطى حجم الوعاء بـ:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

بداية الحل هو رسم المقطع العرضي ثنائي البعد. نستعمل الحروف r و h لتمثيل متغيري نصف قطر وارتفاع مستوى الماء، يمكننا إيجاد العلاقة بين r و h من الشكل 3، باستعمال المثلثات المتشابهة.



الشكل 3: العلاقة بين r و h

نرى من الشكل 3، أنَّ:

$$\frac{r}{h}=\frac{4}{10}$$

أو، بعبارة أخرى:

$$r=\frac{2}{5}h$$

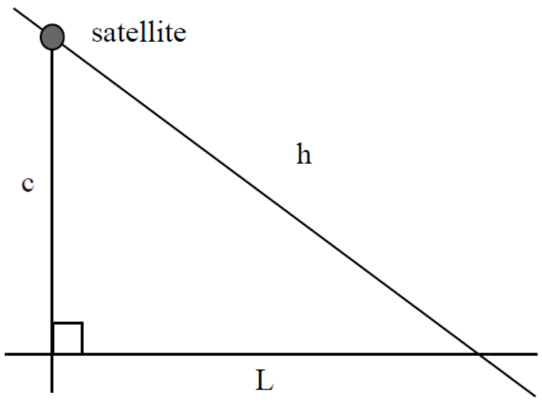
نعوض من أجل r في V لإيجاد:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h=\frac{4}{3(25)}\pi h^3$$
$$\frac{dV}{dt}=V'=\frac{4}{25}\pi h^2 h'$$

الآن، نعوض الأعداد $\left(\frac{dV}{dt}=2,\ h=5\right)$

$$2=\left(\frac{4}{25}\right)\pi(5)^2 h'$$
$$h'=\frac{1}{2\pi}$$

معدلات التغير تظهر أيضاً في مسائل لاحقة (الشكل 4)، هنالك جزء ثان من مسألة تتعلق بهامش الخطأ المتعلق بقمر صناعي، حيث يطلب منك إيجاد $\frac{\Delta L}{\Delta h}$.



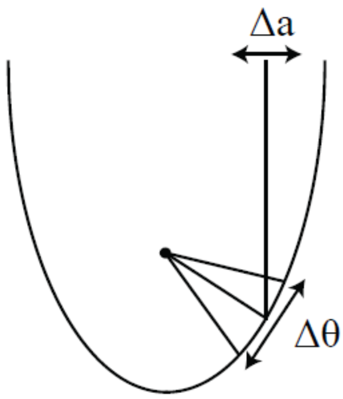
الشكل 4: توضيح مسألة القمر الصناعي.

$$\begin{aligned} L^2+c^2 &= h^2 \\ 2LL' &= 2hh' \end{aligned}$$

و منه:

$$\frac{\Delta L}{\Delta h} \approx \frac{L'}{h'} = \frac{h}{L}$$

هنالك أيضاً مسألة مرآة القطع المكافئ تعتمد على الفكرة نفسها (الشكل 5).



الشكل 5: توضيح مسألة مرآة القطع المكافىء الزائد

هنا، نريد إيجاد كل من $\frac{\Delta a}{\Delta \theta}$ أو $\frac{\Delta \theta}{\Delta a}$. هذا النوع من مسائل دقة القياس له أهمية في كل مسألة قياس، على سبيل المثال، عند توقع متى سيضرب كويكب ما الأرض.