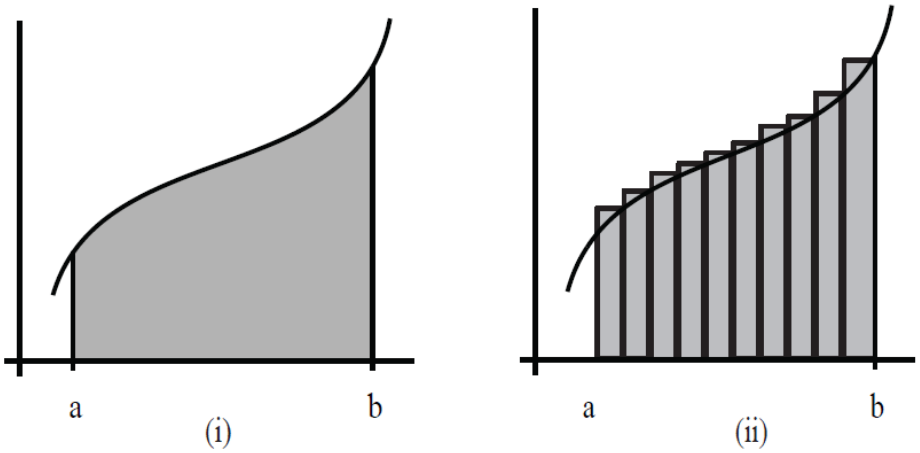
المحاضرة 18
التكاملات المحددة

تستعمل التكاملات لحساب المجاميع المتراكمة، المتوسطات، والمساحات.

المساحة تحت المنحنى: (أنظر الشكل 1).

1. قم بتقسيم المنطقة إلى مستطيلات
2. اجمع مساحات المستطيلات
3. احسب النهاية عندما تصبح المستطيلات رفيعة



الشكل 1- (i) المساحة تحت المنحنى؛ (ii) مجموع مساحات المستطيلات

مثال 1:

$f(x)=x^2$ ، $a=0$ ، و b كيفي

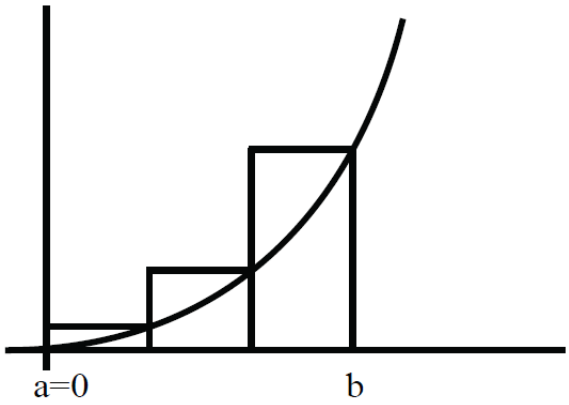
1. قم بتقسيم المجال من 0 إلى b إلى n قسم
   المسافة b/n = قاعدة المستطيل
2. الارتفاعات:

الأول: $x=\frac{b}{n}$ ، الارتفاع= $\left(\frac{b}{n}\right)^2$

الثاني: $x=\frac{2b}{n}$ ، الارتفاع= $\left(\frac{2b}{n}\right)^2$

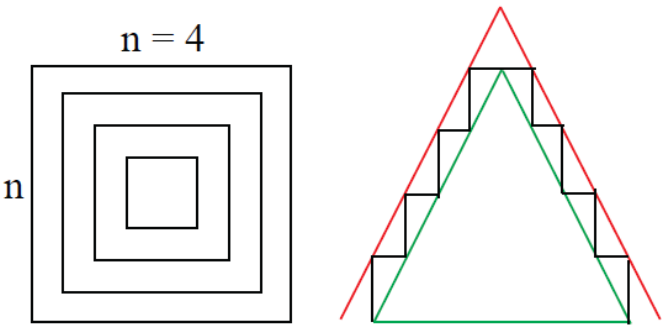
مجموع مساحات المستطيلات:

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)^2+\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{3b}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{nb}{n}\right)^2=\frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$$



الشكل 2- المساحة تحت $f(x)=x^2$ وأعلى $[0,b]$.

سنقدر الآن المجموع باستعمال الهندسة ثلاثية الأبعاد.
ليكن لدينا المدرج هرمي كما في الشكل 3.



الشكل 3- مدرج هرمي: إلى اليسار(الشكل كما يبدو من الأعلى) وإلى اليمين (الشكل كما يبدو من الجانب)

المستوى الأول: $n\times n$ في الأسفل، يمثل الحجم n^2.
المستوى الثاني: $(n-1)\times(n-1)$، يمثل الحجم $(n-1)^2$، الخ.
و منه، الحجم الكلي للمدرج الهرمي هو $1+\ldots+(n-1^2)+n^2$.
إذن، حجم المدرج الهرمي أكبر من حجم الموشور الداخلي

$$1^2+2^2+\ldots+n^2>\frac{1}{3}\ (\text{قاعدة})\ (\text{ارتفاع})\ =\frac{1}{3}n^2\cdot n=\frac{1}{3}n^3$$

وأصغر من حجم الموشور الخارجي:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{1}{3}(n+1)^2(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3$$

على العموم:

$$\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{3}n^3}{n^3}<\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}<\frac{1}{3}\frac{(n+1)^3}{n^3}$$

وبالتالي:

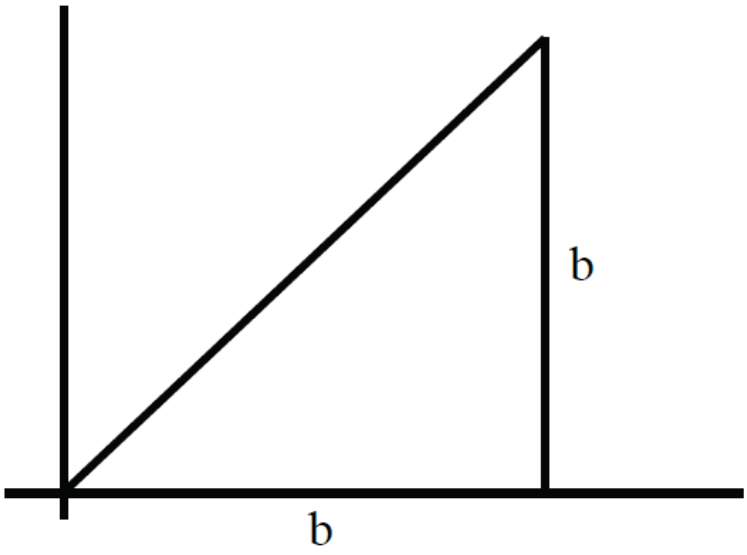
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{1}{3}b^3,$$

والمساحة تحت x^2 من 0 إلى b هي $\frac{b^3}{3}$.

مثال 2: $f(x)=x$ ؛ المساحة تحت x وأعلى $[0,b]$. نستنتج كما في المثال 1، وبشكل أسهل، أن مجموع المساحات يعطي:

$$\frac{b^2}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)\to\frac{1}{2}b^2\ (\text{عندما } n\to\infty)$$

و هي مساحة المثلث في الشكل 4:



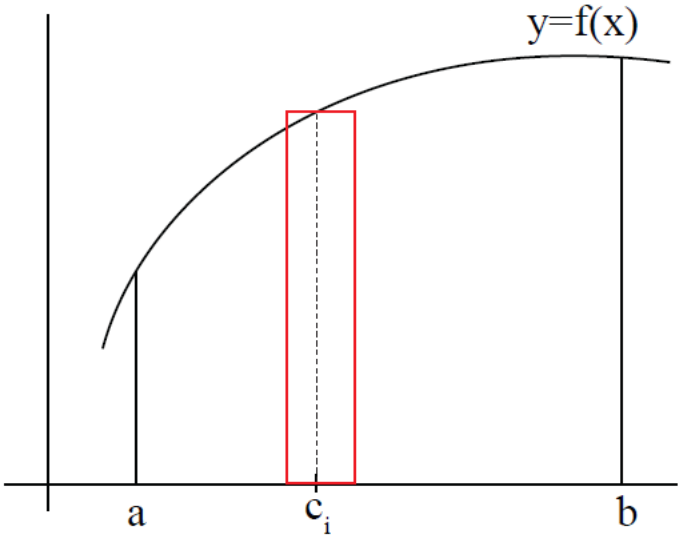
الشكل 4- المساحة تحت $f(x)=x$ وأعلى $[0,b]$

النموذج:

$$\frac{d}{db}\left(\frac{b^3}{3}\right)=b^2$$
$$\frac{d}{db}\left(\frac{b^2}{2}\right)=b$$

يجب أن تحقق المساحة $A(b)$ تحت $f(x)$: $A'(b)=f(b)$.

الصورة العامة



الشكل 5- مستطيل واحد من مجموع رايمان

- قم بتقسيم المجال من a إلى b إلى n قطعة متساوية بطول $\Delta x=\frac{b-a}{n}$=
- اختر أي c_i في المجال؛ استعمل $f(c_i)$ كارتفاع للمستطيل
- اجمع المساحات: $f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+\ldots f(c_n)\Delta x$

وهي باستخدام صيغة المجموع: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ← تسمى *بمجموع رايمان*.

تعريف:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \leftarrow \text{يسمى بالتكامل المحدود}$$

هذا التكامل المحدود يمثل المساحة تحت المنحنى $y=f(x)$ فوق $[a,b]$.

مثال 3:

(تطبيق للتكامل على كميات غير المساحة) يقترض طالب من أهله مبلغاً من المال. P هو المبلغ المقترض بالدولار، $t=$ الزمن بالسنة، $r=$ معدل الفائدة (على سبيل المثال 6% أي $r=0.06$/السنة). بعد مرور فترة من الزمن t، يكون الطالب مديناً بـ $P(1+rt)=P+Prt$.

يمكن استعمال التكامل لتمثيل المبلغ الكلي المقترض كالتالي: نعتبر الدالة $f(t)$، "دالة الاقتراض" بالدولار في السنة. على سبيل المثال، إذا اقترضت 1000$/شهر، إذن $f(t)=12000$/السنة. اسمح لـ f بالتغير وفقاً للزمن.

لنفترض أن $\Delta t = 1/12$سنة$=1$ شهر.

$$t_i = i/12 \qquad i=1,\cdots,12.$$

$f(t_i)$ هي معدل الاقتراض خلال الشهر i، إذن المبلغ المقترض هو $f(t_i)\Delta t$. المجموع هو:

$$\sum_{i=1}^{12} f(t_i)\Delta t.$$

عندما $\Delta t \to 0$، لدينا:

$$\int_0^1 f(t)dt$$

التي تمثل الدين الكلي في سنة واحدة معبراً عنها بالدولار في السنة.

يمكن أيضاً استعمال التكامل لتمثيل المبلغ الكلي المدين. المبلغ المدين يتعلق بسعر الفائدة، أنت مدين بـ

$$f(t_i)(1+r(1-t_i))\Delta t$$

من أجل المبلغ المقترض عند الزمن t_i.

المبلغ المدين للاقتراض في نهاية السنة هو:

$$\int_0^1 f(t)(1+r(1-t))dt$$