المحاضرة 21
تطبيقات اللوغارتمات والهندسة

تطبيق النظرية الأساسية الثانية على اللوغاريتمات

تعريف فريزنل لتكامل الدوال مثل $C(x)$، $S(x)$ يجعلها استعمالها سهل كاستعمال الدوال الابتدائية. من الممكن رسم رسومها البيانية وجدولة قيمها. مطلوب منك العمل على مثال أو مثالين لذلك في واجبك المنزلي. لتعتاد على استعمال التكاملات المُحددة والنظرية الأساسية الثانية، سنتحدث بالتفصيل حول التكامل الأبسط الذي سيكشف عن دالة جديدة نسبياً، مسماة باللوغاريتم.

تذكر أنَّ:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

ما عدا عندما $n=-1$. الاستنتاج هو أنَّ عكس المشتق لـ $1/x$ ليس عبارة عن أس، لكن شيء آخر. إذن لنُعرف الدالة $L(x)$ بـ:

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(إنَّ هذه الدالة هي اللوغاريتم. لكن تذكر أنَّنا توصلنا إلى اللوغاريتم ضمن خطوات عدة، حلَّلنا أولاً a^x، ثم عرَّفنا العدد e، وفي النهاية عرَّفنا اللوغاريتم على أنه مقلوب الدالة e^x. لكن تعريف اللوغاريتم باستعمال صيغة هذا التكامل ستكون أسهل).

كل الخصائص الأساسية لـ $L(x)$ تنتج مباشرة من تعريفها. لاحظ أنَّ $L(x)$ معرفة من أجل $0<x<\infty$. (سوف لن نوسع التعريف إلى ما بعد $x=0$ لأن $1/t$ لا نهائية عند $t=0$). ثم، **إن** النظرية الأساسية الثانية للحساب (FTC2) تعني:

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

أيضاً، بما أننا بدأنا التكامل من النهاية الصغرى 1، فنحن نرى أنَّه:

$$L(1)=\int_1^1 \frac{dt}{t}=0$$

إذن L في تزايد وتقطع المحور x عند $x=1$: $L(x)<0$ من أجل $0<x<1$ و $L(x)>0$ من أجل $x>1$. بالاشتقاق مرة أخرى:

$$L''(x)=-1/x^2$$

نستنتج أنَّ L محدبة إلى الأسفل.

الخاصية الأساسية لـ $L(x)$ (تظهر أنَّها، في الواقع، لوغاريتم) هي أنها تحول الضرب إلى مجموع:

الطلب 1. $L(ab)=L(a)+L(b)$

البرهان: من تعريف $L(ab)$ و $L(a)$،

$$L(ab)=\int_1^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_a^{ab}\frac{dt}{t}=L(a)+\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$$

للتعامل مع $\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$، قم بتعويض $t=au$، ثم:

$$dt=adu\ ؛\quad a<t<ab \Longleftarrow 1<u<b$$

و بالتالي:

$$\int_a^{ab}\frac{dt}{t}=\int_{u=1}^{u=b}\frac{adu}{au}=\int_1^b\frac{du}{u}=L(b)$$

يؤكد هذا $L(ab)=L(a)+L(b)$

خاصيتان إضافيتان عن القيم النهائية، ستكملان الصورة العامة للمنحنى.

الطلب 2. $L(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$.

البرهان:

يكفي توضيح أنَّ $L(2^n)\to\infty$ عندما $n\to\infty$ لأن حقيقة أنَّ L متزايدة تغطي كل القيم بين قوى 2.

$$\begin{aligned} L(2^n) &= L(2\cdot 2^{n-1}) = L(2)+L(2^{n-1}) \\ &= L(2)+L(2)+L(2^{n-2}) = L(2)+L(2)+\cdots+L(2)\ (n \text{ مرة}) \end{aligned}$$

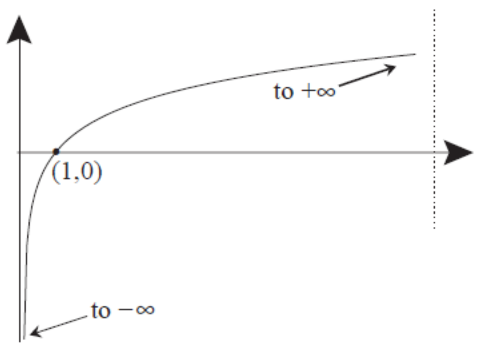
بناء على ذلك، $L(2^n)=nL(2)\to\infty$ عندما $n\to\infty$. (في كتابة متعارف عليها أكثر، $\ln 2^n = n\ln 2$).

الطلب 3. $L(x)\to-\infty$ عندما $x\to 0^+$.

البرهان: $0=L(1)=L\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=L(x)+L(1/x)\Rightarrow L(x)=-L(1/x)$. عندما $x\to 0^+$، $1/x\to\infty$، إذن الطلب 2 يعني $L(1/x)\to\infty$. ومنه:

$$L(x)=-L(1/x)\to-\infty \text{ ، عندما } x\to 0^+$$

وهكذا فإن $L(x)$ المعرفة على $0<x<\infty$ تتزايد من $-\infty$ إلى ∞، قاطعة المحور x عند $x=1$. هي مقعرة إلى الأسفل ويمكن أن يُرسم رسمها البياني كما في الشكل 1.

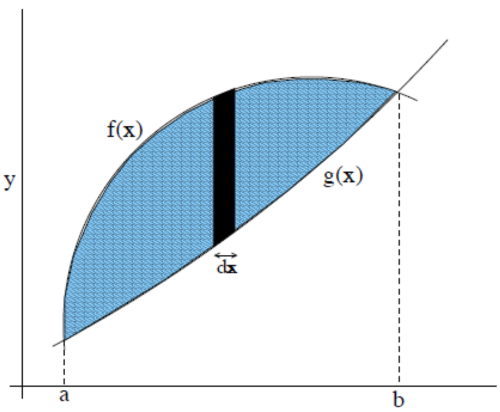


الشكل 1- الرسم البياني للدالة $y=\ln(x)$

يوفر هذا بديلاً لطريقة عملنا السابقة للدالة الأسية والدالة اللوغارتمية. بدءاً من $L(x)$، يمكنناتعريف دالة اللوغارتم بـ $\ln x = L(x)$، ونعرف e على أنه العدد بحيث $L(e)=1$، ونعرف e^x على أنَّها مقلوب الدالة $L(x)$، ونعرف $a^x = e^{xL(a)}$.

تطبيق القانون الأساسي للحساب في الهندسة (الأحجام والمساحات)

1. المساحة بين منحنين



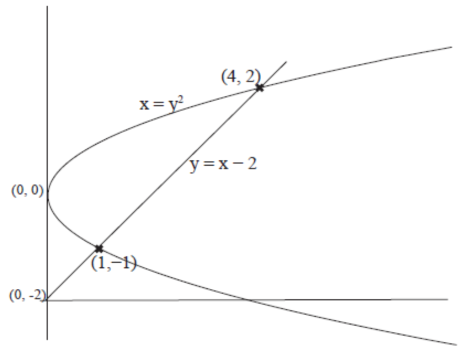
الشكل 2- إيجاد المساحة بين منحنيين

بالعودة إلى الشكل 2 أعلاه، أوجد نقاط التقاطع a و b. المساحة A، بين المنحنين هي:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

مثال 1:

أوجد مساحة المنطقة بين $x = y^2$ و $y = x - 2$.



الشكل3- تقاطع $x = y^2$ و $y = x - 2$.

أولاً، ارسم هاتين الدالتين وأوجد نقاط التقاطع (أنظر الشكل 3).

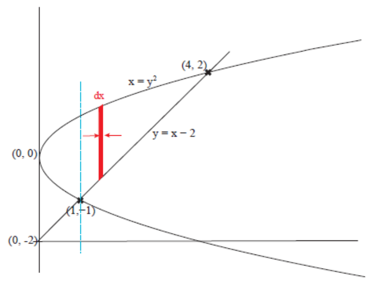
$$\begin{aligned} y+2 &= x = y^2 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ (y-2)(y+1) &= 0 \end{aligned}$$

نقاط التقاطع عند $y = -1,2$. قم بالتعويض في الدالتين لإيجاد قيم x ، $x = 1$ و $x = 4$. أي يلتقي المنحيان عند $(1,-1)$ و $(4,2)$ (أنظر الشكل 3).

هنالك طريقتان لإيجاد المساحة بين هذين المنحنيين، طريقة صعبة وطريقة سهلة.

الطريقة الصعبة: قطع شاقولية:

إذا قمنا بتقطيع المنطقة بين المنحنيين شاقولياً، يجب علينا أخذ منطقتين مختلفتين بعين الاعتبار.



الشكل 4- تقاطع $x = y^2$ و $y = x - 2$.

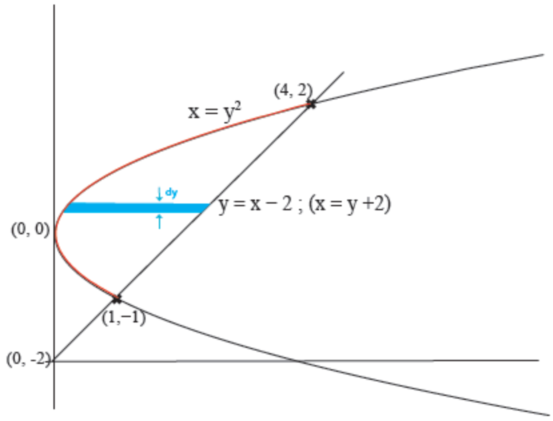
من أجل $x>1$، الحد السفلي للمنطقة هو خط مستقيم. غير أنَّه من أجل $x<1$، الحد السفلي للمنطقة هي النصف السفلي للقطع الزائد. نجد المساحة، A، بين المنحنيين بتكامل الفرق بين المنحنى العلوي والمنحنى السفلي في كل منطقة:

$$A=\int_0^1\left\{\sqrt{x}-\left(-\sqrt{x}\right)\right\}dx+\int_1^4\left\{\sqrt{x}-(x-2)\right\}dx=\int\left(y_{\text{علوي}}-y_{\text{سفلي}}\right)dx$$

الطريقة السهلة: قطع أفقية

هنا، بدلاً من طرح المنحنى السفلي من المنحنى العلوي، نقوم بطرح المنحنى الأيمن من المنحنى الأيسر.

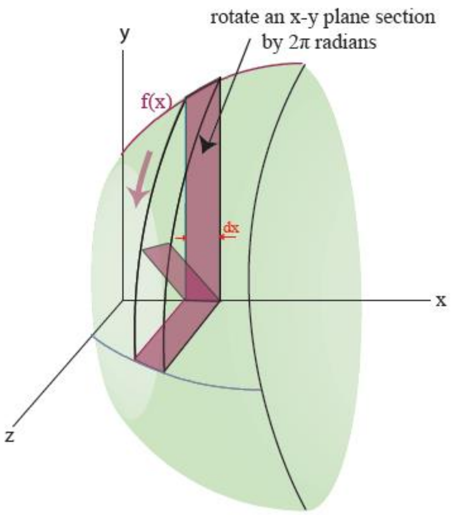
$$A=\int\left(x_{\text{أيسر}}-x_{\text{أيمن}}\right)dy=\int_{y=-1}^{y=2}\left[(y+2)-y^2\right]dx=\left(\frac{y^2}{2}+2y+\frac{-y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{3}$$



الشكل 5- تقاطع $x=y^2$ و $y=x-2$.

2. أحجام الأجسام الصلبة الناتجة عن الدوران

قم بتدوير $f(x)$ حول المحور x، خارج الصفحة، فتحصل على:



الشكل 6- جسم صلب ناتج عن الدوران: القطعة الأرجوانية تدور بـ $\pi/4$ و $\pi/2$.

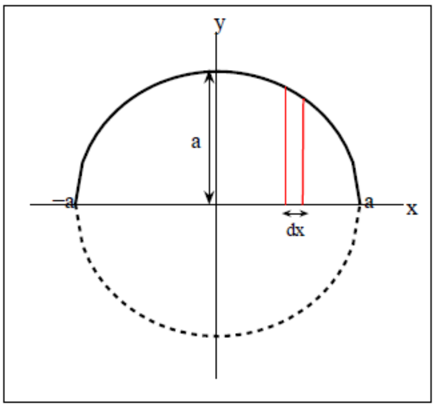
نريد معرفة حجم "القطعة" لهذا الجسم الصلب. يمكننا تقدير كل قطعة على أنها *قرص* سماكته dx، نصف قطره y، ومساحة مقطعه πy^2. فيكون حجم كل قطعة هو:

$$dV = \pi y^2 dx \quad \text{(بالنسبة إلى جسم صلب يدور حول المحور } x\text{)}$$

التكامل بالنسبة لـ x لإيجاد الحجم الكلي الناتج عن دوران الجسم الصلب.

مثال 2:

أوجد حجم الكرة التي نصف قطرها a.



الشكل 7- الكرة التي نصف قطرها a

معادلة النصف العلوي للدائرة هي:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

إذا أدرنا الجزء العلوي من المنحنى حول المحور x، نحصل على كرة نصف قطرها a. لاحظ أنَّ x تتراوح بين $-a$ إلى $+a$. من ذلك نجد:

$$V=\int \pi y^2 dx=\int_{x=-a}^{x=a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx=\left(\pi a^2 x-\frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}\pi a^3-\left(-\frac{2}{3}\pi a^3\right)=\frac{4}{3}\pi a^3$$

يمكن للمرء أن يعتمد على التناظر لتسهيل هذا النوع من المسائل. في المسألة أعلاه، على سبيل المثال، لاحظ أنَّ المنحنى متناظر بالنسبة إلى المحور y، وبالتالي:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx=2\int_{0}^{a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx=2\left(\pi a^2 x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{a}$$

(الفائدة هنا أنَّ النهاية السفلى هي صفر وهي سهلة العمل بها مقارنة بـ $-a$). نجد نفس الإجابة:

$$V=2\left(\pi a^2 x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{a}=2\left(\pi a^3-\frac{\pi}{3}a^3\right)=\frac{4}{3}\pi a^3$$