حل الواجب المنزلي 10

المسألة 1.10

(a) نسحب بقوة F (الحبلين متصلين). عند النقطة O يؤثر الرصيف بقوة مجهولة F' على الأسطوانة. شرط رفع الأسطوانة فحسب من الرصيف هو $N=0$ حيث تمثل N القوة العمودية الاعتيادية التي يؤثر بها الرصيف على الأسطوانة. يمكننا حذف F' بقياس كل عزوم الدوران حول O. (يعرف عزم الدوران أنه موجب إذا سبب دحرجة الأسطوانة على الرصيف.) أما شرط الدوران حول الزاوية (أو حافة الرصيف) فحسب هو $\tau=0$ حيث يمثل τ عزم الدوران الكلي حول O.

$$0=FR\sin(\pi-(\theta+\alpha))-MgR\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=FR\sin(\theta+\alpha)-MgR\cos\theta$$

حيث نستعمل التطابق المثلثي $\sin(\pi-x)=\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$. وبحل المعادلة أعلاه بالنسبة لِـ F نحصل على:

$$\frac{F}{Mg}=\frac{\cos\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$$

(b) تحدث أقصى أو أدنى قيمة محلية عندما:

$$0=\frac{dF}{d\alpha}=-Mg\cdot\frac{\cos\theta\cos(\theta+\alpha)}{\sin^2(\theta+\alpha)}$$

الحل الوحيد للمعادلة أعلاه هو:

$$\cos(\theta+\alpha)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=90°-\theta$$

بالنسبة لِـ $\theta=30°$ ومن ثم $\alpha=60°$. برسم $\frac{F}{Mg}$ بياناً نلاحظ أن $\alpha=60°$ هو الحد الأدنى المحلي والحد الأدنى الإجمالي وأن $\alpha=0$ هو الحد الأقصى الإجمالي (وليس محلي). ليس من الصعب إظهار أنه إذا كانت $\theta<45°$ فتكون القيمة القصوى بالتالي عند $\alpha=0°$، أما إذا كانت $\theta>45°$ فإن الحد الأقصى يكون عند $\alpha=45°$.

المسألة 2-10

ليكن $L = 5\,\text{m}$ و $r = \frac{1}{2}\cdot 0.01\,\text{m}$ و $A = \pi r^2$ و $M = 400\,kg$ و $Y = 0.36\times 10^{10}\ \text{N/m}^2$. تعطينا المعادلة مايلي:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F_{\text{APP}}}{\text{A}} \qquad \Rightarrow \qquad F_{APP} = \frac{YA}{L}\cdot \Delta L$$

حيث F_{APP} هو القوة الكلية المطبقة و ΔL هو الزيادة المرافقة لها في المسافة. يعد مناسباً أن نعرف القيمة الثابتة K على أنها:

$$k = \frac{YA}{L} \approx 5.7\times 10^4\ \text{N/m} \qquad \Rightarrow \qquad \text{F}_{\text{APP}} = k\Delta L$$

أولاً يلزمنا حساب مقدار التمدد في الحبل، Δ، بسبب ثِقَل $400\,\text{kg}$ وحدها.

$$\Delta = \frac{Mg}{k} \approx 0.070\,\text{m}$$

(a) يلزمنا إيجاد القوة الإضافية اللازمة لِمَدِّ الحبل بـ $0.03\,\text{m}$ أخرى.

$$F + Mg = k(\Delta + 0.03) \qquad \Rightarrow \qquad F = k\cdot 0.03 \approx 1.78\times 10^3\ \text{N}$$

(b) لتكن x تدل على مقدار الإزاحة/الانتقال إلى الأسفل من وضع التوازن. (يتوافق التوازن مع طول الحبل $L+\Delta$.) تعطي المعادلة أعلاه القوة المطبقة اللازمة F_{APP} لمد الحبل بـ (مقدار) ΔL؛ وبالتالي فإنه يجب على الحبل ممارسة قوة استرجاع ذات شدة مساوية ومعاكسة. وبالتالي فإنه من أجل إزاحة/ إنتقال x إلى الأسفل من (وضع) التوازن، مع غياب القوة المطبقة، تكون القوة الكلية هي:

$$F_{\text{TOT}} = -k(\Delta + x) + Mg = -kx$$

حيث أن F هي القوة الكلية الموجهة نحو الأسفل المرافقة لإزاحة/ انتقال x نحو الأسفل من (وضع) التوازن.

المعادلة أعلاه صالحة بالنسبة لِـ x من أجل $\Delta + x > 0$ ($x > -\Delta \approx -0.07\,\text{m}$) لأنه إذا كانت $\Delta + x < 0$ فسيرتخي الحبل وستتبدد قوة الاسترجاع وسيكون لابد من تغيير نمط المعادلة أعلاه. في الوقت الراهن، يكون التحرك الإبتدائي هو $0.03\,\text{m}$ بدون سرعة إتجاهية ابتدائية وبالتالي، فإن الحركة لن تسبب ارتخاءً في الحبل؛ وبالتالي فإن المعادلة أعلاه ستبقى صالحة لكل الحركة. ولذلك تعد الحركة، بناءً على ذلك، توافقية بسيطة في x وزمنها الدوري هو:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \approx 0.53\,\text{s}$$

(c) مع الشرط المبدئي $x = 0.10m$ بدون سرعة إتجاهية ابتدائية ستسبب الحركة ارتخاءً في الحبل. ستبدأ الكتلة عند $x = 0.10\,\text{m}$ وستمضي عبرَ $x = 0$ إلى $x = -0.07\,\text{m}$، وعند هذه النقطة سيبدأ الحبل بالتمدد وسوف لن يكون هنالك قوة استرجاعية باستثناء قوة الجاذبية. ولن تكون الحركة توافقية بسيطة بالكامل بعد ذلك.

(d) قوة الشد النهائية معطاة على أنها:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_{\max} = 3.2\times10^{8}\ \text{N/m}^2.$$

حينذاك ستكون الكتلة القصوى هي:

$$M_{\max} = \frac{A}{g}\left(\frac{F}{A}\right)_{\max} \approx 2.6\times10^{3}\ \text{kg}$$

يمكنك فقط حساب الحد الأدنى للمسافة التي سيتمددها الحبل. كما رأينا في المحاضرات، قانون هوك (ومنه $\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{YA}$) لن يعود صالحاً قرب نقطة الانقطاع. والحد الأدنى سيكون:

$$\Delta L = \frac{L}{Y}\left(\frac{F}{A}\right)_{\max} \approx 0.44\,\text{m}$$

وهكذا يكون الحد الأدنى لطول الحبل هو $5.44\,\text{m}$.

المسألة 3-10

لتكن $\rho = 1\,\text{g/cm}^3$ هي كثافة الماء، ρ_W هي كثافة الخشب، ρ_O هي كثافة الزيت و V هي حجم الخشب، أما بالنسبة للماء فإن،

$$\rho \cdot \frac{2}{3}V = \rho_W \cdot V \qquad \Rightarrow \qquad \rho_W = \frac{2}{3}\cdot \rho \approx 0.67\ \text{gm/cm}^3$$

وبالنسبة للزيت فإن،

$$\rho_O \cdot 0.9 \cdot V = \rho_W \cdot V \qquad \Rightarrow \qquad \rho_0 = \frac{1}{0.9}\cdot \rho_W \approx 0.74\ \text{gm/cm}^3$$

المسألة 4-10

ليكن p_0 هوالضغط الجوي، $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ هي كثافة الماء، M هي كتلة القضيب، و A هي مساحة مقطعه العرضي و $d = 3\,m$ هي عمقه عند التوازن و x هي إزاحته/إنتقاله نحو الأسفل من عمق التوازن. نحصل على عمق التوازن من خلال مايلي:

$$Mg = \rho g d A$$

معادلة القوة هي:

$$p_0 A + Mg - \left(p_0 + \rho g\left(d + x\right)\right)A = M\ddot{x}$$

حيث $p_0 + \rho g\left(d + x\right)$ هو الضغط عند أسفل القضيب. إذا استعملنا العبارة $Mg = \rho g d A$ في المعادلة أعلاه

$$-\rho g A x = M\ddot{x}$$

إذا استعملنا عبارة مكافئة $\rho g A = \frac{Mg}{d}$ في المعادلة أعلاه وألغينا معامل M يكون لدينا:

$$-\frac{g}{d}\cdot x=\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}\approx 3.5\,\mathrm{s}$$

لاحظ أنه كان من غير الضروري تحديد قيمة $\mathrm{kg\cdot m/s_0}$ لتقييم العبارة بالنسبة لـِ T؛ وبالتالي فإنَّ التغيير في الضغط الجوي بـمقدار 5% سوف لن يغير من دور الإهتزاز على الإطلاق.

المسألة 5-10 *

لتكن $\rho=7.8\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ هي كثافة هذا الفولاذ. لنركز الآن على أحد نصفي شريط القياس، ولتكن x هي المسافة من محور الدوران إلى قطعة محددة ضئيلة الطول dx على شريط القياس. إذا كانت مساحة المقطع العرضي هي A، فإن الكتلة الموافقة هي $dm=\rho A dx$. القوة الجاذبة المركزية اللازمة لتسريع تلك القطعة الضئيلة من الفولاذ هي $dF=dm\cdot\omega^2 x=\rho A\omega^2 x dx$ حيث تكون ω هي السرعة الزاوية لشريط القياس أما التوتر الكلي عند مركز شريط القياس فسيكون بالتالي:

$$T=\int dF=\int_0^{\frac{1}{2}}\rho A\omega^2 x dx=\rho A\omega^2\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\omega^2\rho A}{8} \qquad \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{8}{\rho}\frac{T}{A}}$$

حيث $\frac{1}{2}$ هو طول نصف شريط القياس، أما السرعة الزاوية القصوى فهي:

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{8}{\rho}\left(\frac{T}{A}\right)_{\max}}\approx 624\ \text{radian/s}$$

حيث تكون قوة شد الفولاذ القصوى البالغة، $\left(\frac{T}{A}\right)_{\max}=3.8\times10^8\ \mathrm{N/m^2}$.

المسألة 10-6 *

(a) معدل تزايد درجة الحرارة هو كمية الطاقة المخزنة من قِبَل كل إلكترون (3.2×10^{-9} J) مضروبة في معدل الإلكترونات ($3.0\times10^{14}\ \text{s}^{-1}$).

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 3.2\times10^{-9}\cdot 3.0\times10^{14} = 9.6\times10^{5}\ \text{J/s} \approx 230\ \text{kcal/s}$$

حيث يكون التحويل المستعمل هو 1 cal = 4.186 J.

(b) كتلة الماء في مخزون الحزمة الشعاعية هي $m = 10^3\times\ \text{kg/m}^3\cdot 12\ \text{m}^3 = 1.2\times10^4\ \text{kg}$. أما المعادلة (1) في الصفحة 517 فهي:

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

وبالتالي فإن معدل تزايد درجة الحرارة هو:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{mc}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx 0.019^\circ\ \text{C/s}$$

حيث نجد السعة الحرارية النوعية للماء مذكورة في الجدول 20.1 على الصفحة 516 على أن $c = 1.00\ \text{kcal/kg}\cdot{}^\circ\text{C}$

المسألة 10-7*

حجم مول واحد من الغاز في الشروط النظامية هو:

$$V = \frac{RT}{p} \approx \frac{8.31\cdot 273}{10^5} \approx 0.0227\ \text{m}^3$$

والحجم الذي تشغله ذرات الهليوم هو:

$$V_{\text{atom}} \approx 6.02\times10^{23}\cdot 3\cdot10^{-30} \approx 1.81\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

وبالتالي فإن ذلك الجزء من الحجم الذي تشغله ذرات الهليوم هو:

$$f = \frac{V_{\text{atom}}}{\text{V}} \approx 8\times10^{-5} = 0.008\%$$

المسألة 8.10 *

(a) ليكن $p = 1\,\text{atm} = 1.01\times10^5\ \text{N/m}^2$ ، ولتكن A هي مساحة المقطع العرضي لجرس الغوص و $h = 2\,\text{m}$ و h' هو ارتفاع الهواء في جرس الغوص عند غمره بالماء. وبذلك يمكننا الحصول على p' التي تمثل ضغط الهواء في جرس الغوص عند غمره بالماء وذلك من ضغط الماء عند عمق 15 m.

$$p' = p + \rho g z$$

حيث تكون $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ هي كثافة الماء، و $z = 15\,\text{m}$. مما يعطينا القيمة التالية:

$$p' = 2.48\times10^5\ \text{N/m}^2$$

وبافتراض درجة الحرارة ثابتة، يكون:

$$phA = pV = p'V' = p'h'A \quad \Rightarrow \quad h' = \left(\frac{p}{p'}\right)h \approx 0.81\,\text{m}$$

و بالتالي فإن الماء سيرتفع بـ (مقدار) $2 - 0.81 \approx 1.2\,\text{m}$.

(b) يجب على الهواء أن يُضخ بضغط مساوٍ لضغط الماء عند أسفل جرس الغوص، الذي يقع على عمق $15 + 1.2 = 16.2\,\text{m}$، ويبلغ الضغط عند ذلك الارتفاع :

$$p_f = p + \rho g z \approx 2.6\times10^5\ \text{N/m}^2$$

حيث تكون $z = 16.2\,\text{m}$ ، أما كمية الهواء اللازمة عند ذلك الضغط فهي $\frac{p_f V}{RT}$ حيث $v = 3.5\,\text{m}^3$ و $T = 15°C = 288\,\text{K}$. تبلغ كمية الهواء الأصلية $\frac{pV}{RT}$. وبالتالي فإن عدد المولات التي لابد من إضافتها هي $\frac{(p_f - p)V}{RT}$. والكتلة المولية المتوسطة للهواء هي $29g$. بالتالي فإن كتلة الهواء التي لابد من إضافتها هي:

$$M = (0.029)\cdot\frac{(p_f - p)V}{RT} \approx 6.84\,\text{kg}$$

المسألة 9-10*

سنفترض أن كمية الهواء التي تصنع الفقاعة تلبي قانون الغاز المثالي.

$$pV = nRT$$

إذا بقيت درجة الحرارة وكمية الهواء ثابتتين، إذن يكون الفرع الأيمن من المعادلة أعلاه ثابتاً.

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad (1)$$

يكون الضغط والحجم عند عمق $15\,\text{m}$ هما:

$$p_1 = 1.013\times10^5\ \text{N/m}^2 + \left(9.8\ \text{m/s}^2\right)\left(1.0\times10^3\ \text{kg/m}^3\right)\left(15\,\text{m}\right) = 2.483\times10^5\ \text{N/m}^2$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1.0\,\text{cm}}{2}\right)^3 = 5.236\times10^{-7}\ \text{m}^3$$

أما الضغط عند السطح فيبلغ:

$$p_2 = 1\,\text{atm} = 1.13\times10^5\ \text{N/m}^2$$

ويعطينا استعمال المعادلة (1) الحجم عند السطح على النحو التالي:

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2}\cdot V_1 = 1.283\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

وبافتراض أن الفقاعة تبقى كروية، نحصل على القطر عند السطح من خلال مايلي:

$$d = 2\cdot\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.348\times10^{-2}\ \text{m} = 1.348\,\text{cm}$$

المسألة 10.10 *

تبلغ كثافة الهواء الخارجي $\rho_a = 1.20kg/m^3$. وتبلغ كتلة المنطاد، الخ. بدون هواء $M_b = 730\,\text{kg}$ ، أما حجم المنطاد فيبلغ $V_b = 2200\,\text{m}^3$. إذا كانت كتلة الهواء الساخن داخل المنطاد هي M والكتلة المكافئة من الهواء البارد (نفس الحجم لكن بدرجة حرارة الجو) هي $\rho_a V_b$ ، فإن شرط بدء البالون في الإرتفاع هو:

$$\rho_a V_b - M = M_b \qquad \Rightarrow \qquad M = \rho_a V_b - M_b = 1.91\times10^3 \text{ kg}$$

المنطاد مفتوح من الأسفل، بحيث يكون ضغط الهواء في الداخل هو نفس ضغط الهواء الخارجي. الكتلة المولية للهواء هي $m = 29.0 \text{ g/mole}$. ضغط الهواء الخارجي عند $T_a = 20°C = 293.15\,\text{K}$ هو:

$$p_a = \frac{n_a RT_a}{V_a} = \frac{n_a m}{V_a}\cdot\frac{RT_a}{m} = \rho_a \cdot \frac{RT_a}{m} = 1.0086\times10^5 \text{ N/m}^2$$

تبلغ كتلة الهواء داخل المنطاد:

$$M = mn_b = m\cdot\frac{p_b V_b}{RT_b} \qquad \Rightarrow \qquad T_b = m\cdot\frac{p_b V_b}{RM} = 405\,\text{K} = 132°\text{C}$$

حيث يكون $p_b = p_a$.

المسألة 10-11 *

نفترض وجود طبقة/كتلة هوائية ذات مساحة أفقية تبلغ A وارتفاع تبلغ dh. فرق الضغط بين أسفل وأعلى الكتلة يجب أن يتحمل وزن الهواء الموجود ضمن الكتلة.

$$pA-(p+dp)A-(Adh)\cdot\rho\cdot g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad dp = -\rho g\, dh \qquad (2)$$

لو افترضنا أن ρ يمثل قيمة ثابتة، بالتالي، سيمكننا ذلك من اشتقاق النتيجة الاعتيادية للضغط، لكن إن بقيت درجة الحرارة ثابتة مع الارتفاع، فلا بد للكثافة حينذاك أن تتفاوت مع الارتفاع. يمكننا الحصول على العلاقة بين الضغط والكثافة باستعمال قانون الغاز المثالي.

$$p = \frac{N}{V}\cdot kT = \frac{mN}{V}\cdot\frac{kT}{m} = \rho\frac{kT}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{mp}{kT}$$

حيث $m = \frac{29.0\,\text{g}}{N_A} = 4.82\times10^{-26}\,\text{kg}$ هي كتلة جزيء واحد من الهواء. يمكننا استعمال ما ورد أعلاه لصياغة المعادلة (2) على الشكل التالي:

$$dp = -p\cdot\frac{mg}{kT}dh$$

لدينا الآن معادلة تفاضلية صالحة بالنسبة للضغط p ، كدالة للارتفاع h. يمكننا حل هذه المعادلة بإتباع هذه الخطوات:

$$\frac{1}{p}dp = -\frac{mg}{kT}dh$$

$$\ln p - \ln p_0 = \int \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}\int dh = -\frac{mg}{kT}(h-0)$$

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

المسألة 10-12 *

تعمل الحلقات الجانبية كفجوات للسماح بالتمدد الحراري في أنابيب النفط الطويلة. حتى بالنسبة إلى تغير طفيف في درجة الحرارة، قد تكون زيادة طول الأنبوب كبيرة جداً. سيحمي هذا الأمر الأنابيب من مسألة كونها مربوطة بصلابة عند كل طرف. تسمح الحلقات لكل قطعة قصيرة من الأنبوب بالتمدد ولكنها تمنع التأثير الكامل من أن يكون تراكمياً.

وبما أنه لابد للنفط من البقاء في حالة تدفق (مستمر)، لابد من استخدام الحلقات عوضاً عن الفجوات المستخدمة في الجسور.

* أوهانيان وماركيت- الفيزياء للمهندسين والعلماء- الطبعة الثالثة