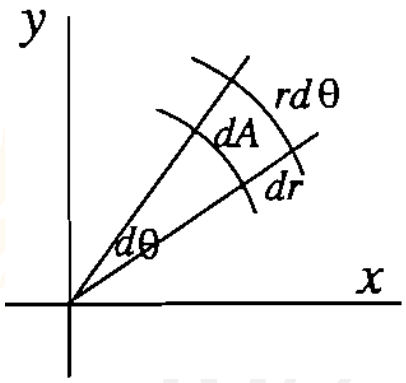
CV-4. تغيير الإحداثيات في التكاملات الثلاثية

عنصر المساحة:

في الاحداثيات القطبية وجدنا أن عنصر المساحة له الصيغة $dA = r\,dr\,d\Theta$ وذلك عن طريق رسم المنحنيات الشبكة $r=r_0$ و $\Theta=\Theta_0$ في النظام r, Θ، وبتحديد (انظر الشكل) المساحة المتناهية في الصفر لأحد العناصر الصغيرة في الشبكة.



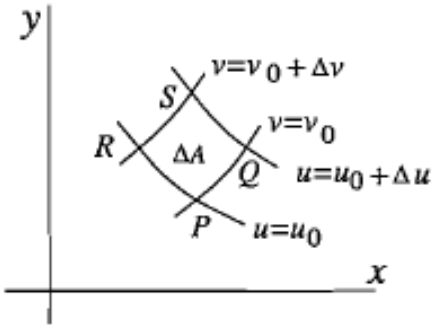
من أجل الاحداثيات u,v نقوم بالأمر نفسه. منحنيات الشبكة (4) تقسم المستوي إلى مناطق صغيرة ΔA محددة بهذه المنحنيات الكفافية (الكونتورية). إذا كانت المنحنيات الكفافية متقاربة لبعضها بعضاً، ستكون متوازية تقريباً، وبهذا سيكون عنصر الشبكة متوازي الأضلاع بشكل تقريبي.

$$\Delta A \approx \text{مساحة متوازي الأضلاع PQRS} = |PQ \times PR| \qquad (13)$$

في الاحداثيات u,v تكون احداثيات النقاط P,Q,R هي:

$$P: (u_0,v_0), \quad Q: (u_0 + \Delta u, v_0), \quad R: (u_0, v_0 + \Delta v)$$

لاستخدام الضرب (الجداء) الاتجاهي في (13) أعلاه، نريد أن نعبّر عن PQ و PR في الاحداثيات i, j.



بالنسبة لـ PQ، لدينا:

$$\mathrm{PQ} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} \qquad \textbf{(14)}$$

حيث Δx , Δy هما التغيرات في x و y عندما تكون $v = v_0$ وتتغير u_0 إلى $u_0 + \Delta u$.

حسب تعريف المشتقات الجزئية،

$$\Delta x \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 \Delta u, \qquad \Delta y \approx \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \Delta u;$$

وباستخدام (14)،

$$PQ \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 \Delta u\ \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \Delta u\ \mathbf{j}\ . \qquad (15)$$

بنفس الطريقة، وحيث أنه عند الانتقال من P إلى R، سنحتفظ بقيمة u ثابتة ونزيد v_0 بمقدار Δv،

$$PR \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 \Delta v\ \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 \Delta v\ \mathbf{j}\ . \qquad (16)$$

نستخدم (13) الآن، حيث أن المتجهات في المستوي xy، PQ x PR لها المركبة K فقط، ونحسب من (15) و(16):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\text{-component of } PQ \times PR &\approx \begin{vmatrix} x_u \Delta u & y_u \Delta u \\ x_v \Delta v & y_v \Delta v \end{vmatrix}_0 \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_0 \Delta u \Delta v\ , \end{aligned} \qquad (17)$$

حيث أخذنا أولاً مدورة (منقول) محددة المصفوفة (والتي لاتغير قيمتها)، ومن ثم اخرجنا Δv و Δu من العمودين. أخيراً، نأخذ القيمة المطلقة، فنحصل من (13) و (17)، ومن تعريف المصفوفة الجاكوبية على:

$$\Delta A \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_0 \Delta u \Delta v\ ;$$

بأخذ النهاية حيث $\Delta u, \Delta v \to 0$ وبحذف الرمز السفلي 0 (حيث P تصبح أي نقطة في المستوي)، نحصل على الصيغة المطلوبة لعنصر المساحة:

$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv\ .$$

تغيير الإحداثيات في التكاملات الثلاثية

هنا تغيير الإحداثييات يتضمن ثلاثة توابع

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

تبقى المبادئ الأساسية كما هي. الإحداثيات الجديدة w،v،u تعطينا شبكة ثلاثية الأبعاد، مكونة من المجموعات الثلاث للسطوح الكفافية (الكونتورية) لـ u و v و w. توضع الحدود بنفس الطريقة المستخدمة في التكاملات الثنائية. ولكن نحتاج أيضاً إلى صيغة عنصر الحجم الجديد dV.

للحصول على حجم المنطقة الصغيرة سداسية الوجوه ΔV لفضاء محدود بثلاثة أزواج من هذه السطوح الكفافية (الكونتورية)، نلاحظ أنّ السطوح المحيطية القريبة هي متوازية تقريباً، وبالتالي فإنّ ΔV هو تقريباً متوازي سطوح، والذي حجمه (تبعاً للإشارة) هو المحدد 3 x 3 والذي تشكل أسطره الأضلاع الثلاثة التي تلتقي في زاوية الشكل السداسي ΔV. يتم حساب هذه المتجهات كما في الفقرة السابقة؛ بعد وضع الحدود نحصل على

$$dV = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw\,, \tag{24}$$

حيث المعامل المفتاح هو المصفوفة الجاكوبية:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \tag{25}$$

كمثال، يمكنك التأكد من أن ذلك يعطينا عنصر الحجم الصحيح من أجل التغيير بين الإحداثيات المستطيلة والإحداثيات الكروية:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\phi; \tag{26}$$

بما أنّ هذه التدريب جيد، فسيجعلنا ندرك لماذا معظم الناس تفضل استخراج عنصر الحجم في الإحداثيات الكروية بواسطة المنطق الهندسي.