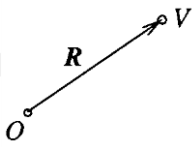
G. الجاذبية

نستعمل التكامل الثلاثي لحساب الجاذبية التي يطبقها جسم صلب V كتلته M على كتلة نقطية موضوعة على نقطة المبدأ.

إذا كان الجسم الصلب V أيضاً عبارة عن كتلة نقطية، إذاً بحسب قانون نيوتن للجاذبية، القوة المطبقة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F = \frac{GM}{|R|^2} r \qquad (1)$$



حيث R هو شعاع الموضع من نقطةِ المبدأ إلى النقطة V، وشعاع الوحدة $r = R/|R|$ هو جهته.

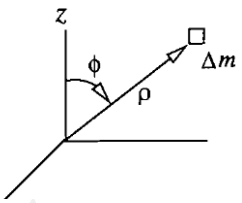
إذا لم يكن الجسم V جسماً نقطياً، يكون علينا استعمال التكامل. سنركز على إيجاد المركبة K للجاذبية – سيكون في كل أمثلتنا الجسم V موضوعاً بشكل متناظر بحيث تكون جهة قوة جذبه في الاتجاه K في كل حالة.

لحساب هذه القوة، نقسم الجسم V إلى قطع صغيرة حجم كل واحدة ΔV و كتلتها Δm. إذا كانت دالة الكثافة هي $\delta(x,y,z)$، فيكون لدينا بالنسبة إلى القطعة التي تحوي النقطة (x,y,z):

$$\Delta m \approx \delta(x,y,z)\Delta v \qquad (2)$$

بالتفكير في هذه القطعة الصغيرة كونها أساساً كتلة نقطية عند (x,y,z)، القوة ΔF التي تطبقها على وحدة الكتلة عند نقطة المبدأ معطاة بالعلاقة (1)، و مركبتها K ΔF_z هي إذن:

$$\Delta F_z = G\frac{\Delta m}{|R|^2} r \cdot K,$$



التي تصبح بالاحداثيات الكروية، باستعمال (2)، والشكل:

$$\Delta F_z = G\frac{\cos\phi}{\rho^2}\delta\Delta V = G\frac{\delta\Delta V}{\rho^2}\cos\phi$$

إذا جمعنا كل المساهمات إلى القوة انطلاقاً من كل عناصر الكتلة Δm وأخذ النهايات، نحصل من أجل المركبة K لقوة الجاذبية:

$$F_z = G\iiint_V \frac{\cos\phi}{\rho^2}\delta dV \qquad (3)$$

إذا كان التكامل في الاحداثيات الكروية، إذن $dV = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$، ويصبح التكامل كالتالي:

$$F_z = G\iiint_V \delta\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \qquad (4)$$

مثال 1. أوجد قوة الجاذبية للنصف الأعلى للجسم الكروي ذي نصف القطر a المتمركز في نقطة المبدأ، إذا كانت كثافته معطاة بـ $\delta = \sqrt{x^2+y^2}$.

الحل. ما دام الجسم الصلب وكثافته متناظرة حول المحور z، ستكون القوة في جهة k، ويمكننا استعمال (3) أو (4).

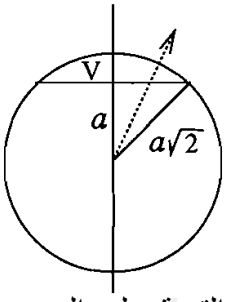
بما أنَّ

$$\sqrt{x^2+y^2}=r=\rho\sin\phi$$

فالتكامل هو:

$$F_z=G\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\rho\sin^2\phi\cos\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

والتي نحسب بكل سهولة قيمتها، $\pi Ga^2/3$.



المثال 2. لتكن V جسم قبعة كروية صلبة نحصل عليها بتقطيع كرة صلبة نصف قطرها $a\sqrt{2}$ بمستوي على بعد a من مركز الكرة. أوجد جاذبية V على كتلة وحدة نقطية عند مركز الكرة. (خذ الكثافة على أنها 1.)

الحل. للاستفادة من التناظر، نضع نقطة المبدأ في مركز الكرة، ونضع محور القبعة على المحور z (على أن تكون الجهة المسطحة للقبعة موازية للمستوي xy).

نستعمل الاحداثيات الكروية؛ المشكلة الأساسية تكمن في تحديد نهايات التكامل. إذا ثبتنا ϕ و θ وجعلنا ρ تتغير، نحصل على شعاع الذي يدخل V من جهتها المسطحة:

$$z=a \text{ أو } \rho\cos\phi=a\text{،}$$

ويترك V على جهتها الكروية، $\rho=a\sqrt{2}$.

الأشعة التي تقطع V بهذه الطريقة هي تلك التي يكون فيها $0\le\phi\le\pi/4$، يمكن لأحدنا أن يرى ذلك من الشكل.

وعليه من (4)،

$$F_z=G\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{a/\cos\phi}^{a\sqrt{2}}\sin\phi\cos\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

التي بعد المكاملة وفقا لـ ρ (و θ) تصبح:

$$= 2\pi G\int_0^{\pi/4} a\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\cos\phi}\right)\sin\phi\cos\phi d\phi$$
$$= 2\pi Ga\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1\right).$$

ملاحظة. قد بين نيوتن أنَّ كرة صلبة كثافتها متجانسة وكتلتها M تطبق نفس القوة على نقطة كتلية خارجية شأنها شأن نقطة كتلية M موضوعة على مركز الكرة. (أنظر المسألة $6a$).

لكن لا يمكن تعميم هذا على أجسام صلبة متجانسة أخرى كتلتها M - من غير الصحيح أنَّ قوة الجاذبية التي تطبقها الأجسام هي نفسها التي تطبقها كتلة نقطية M عند مركز كتلها. لأنه إذا كان الأمر كذلك، كتلة نقطية اختبارية موضوعة على المحور بين كتلتين متساويتين M و M' ينبغي أن تسحب نحو المنتصف، في حين أنه في الواقع ستسحب نحو الكتلة الأقرب من الكتلتين.