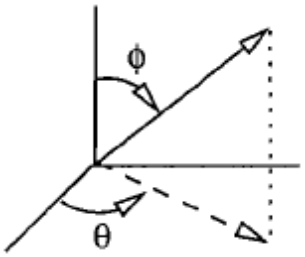
I-4. حدود التكاملات المتتابعة

الإحداثيات الكروية

سنستخدم مرة أخرى نفس الإجراء المتبع لحساب حدود التكامل المتتابع $\iiint_D dpd\Phi d\Theta$ على المنطقة D في نظام ثلاثي البعد ، سنكامل أولاً بالنسبة لـ ρ.



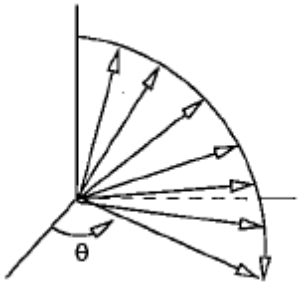
إذاً:

1- قم بتثبيت قيمة كل من Φ و Θ ، ودَع ρ تزداد. سينتج لدينا شعاع ينطلق من مبدء الإحداثيات.

2- قم بالمكاملة من قيمة ρ التي يدخل عندها الشعاع السابق المنطقة D إلى قيمة ρ التي يغادر عندها الشعاع المنطقة. ذلك سيعطينا الحدود لـ ρ.

3- قم بتثبيت قيمة Θ ودع Φ تزداد. ذلك يعطينا مجموعة من الأشعة، ذلك يعطي شكلاً كالـ "مروحة"، قم بالمكاملة على قيم Φ التي تتقاطع عندها الأشعة والمنطقة D.

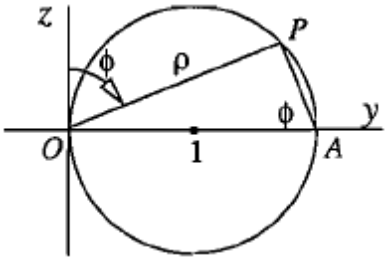
4- أخيراً، قم بوضع حدود Φ بحيث تتضمن كل قيم في "المروحة" التي تتقاطع مع المنطقة D.



على سبيل المثال، افترض أننا سنبدأ بالدائرة في المستوي yz التي نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها عند النقطة (1,0)، قم بتدويرها حول المحور z وليكن D هو الجزء من المجسم الناتج الذي يقع في الثُمن الأول.

أولاً، يجب علينا تحديد معادلة السطح المشكل بواسطة تدوير الدائرة. في المستوي yz، الإحداثيين ρ و Φ محددين في الشكل. لرؤية العلاقة بينهما عندما تكون P على الدائرة، نجد أيضاً أن OAP = Ø بما أنّ كلا الدائرتين Φ و AOP متممتان للزاوية OAP.

من المثلث الأيمن، ذلك يبين لنا أنّ ρ=2sin Φ.



بما أنّنا نقوم بتدوير الدائرة حول المحور z، فإنّ العلاقة تبقى نفسها، وبالتالي فإنّ ρ=2sin Φ هي معادلة كامل السطح.

لوضع حدود التكامل، عندما نقوم بتثبيت قيمة كل من Φ و ρ، فالشعاع الموافق لتلك القيم يدخل المنطقة عند ρ = 0 ويغادرها عند ρ=2sin Φ.

عندما تتزايد Φ وتبقى قيمة Φ ثابتة، فإن الشعاع بين Φ =0 و Φ = π /2 هو الذي يتقاطع مع المنطقة D، بما أننا نأخذ بعين الإعتبار فقط الجزء من السطح الذي يقع في الثُمن الأول (أي أنّه يقع فوق المستوي xy).

مرة أخرى، بما أنّنا نريد فقط الجزء الواقع في الثمن الأول، فإننا نستخدم فقط قيم Φ من الصفر إلى π/2.

وبالتالي فالتكامل المتتابع هو $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2sin\Phi} dpd\Phi d\Theta$