

N. المتغيرات غير المستقلة

1. المشتق الجزئي مع متغيرات غير المستقلة.

حتى الآن، في حسابنا للمشتقات الجزئية للدوال مثل $w = f(x, y)$ أو $w = f(x, y, z)$ ، فإننا نفترض أن المتغيرات x, y (أو x, y, z) هي متغيرات مستقلة. ولكن في التطبيقات على أرض الواقع غالباً ما يكون هذا الأمر غير صحيح. وبالتالي فإن حساب المشتقات الجزئية يصبح مربكاً، لكن من الأفضل التعرض لمثل هذه التطبيقات بينما تدرس مساق (التفاضل والتكامل)، بدلاً من أن تتفاجئ بها في نفس الوقت الذي تتعامل فيه مع الديناميكا الحرارية أو الاقتصاد أو أي منهج آخر في مسيرتك الدراسية.

على سبيل المثال، في الديناميكا الحرارية، المتغيرات الثلاثة المرتبطة مع الغاز المُحتوى هي:

$$p = \text{ضغطه،} \quad v = \text{حجمه،} \quad T = \text{درجة حرارته.}$$

ويمكن أيضاً التعبير عن متغيرات أخرى للديناميكا الحرارية مثل الطاقة الداخلية U والانتروبي (الاعتلاج) S بدلالة كلٍ من T, v, p .

ومع ذلك، فإن T, v, p متغيرات غير مستقلة. فإذا كان الغاز "غازاً مثالياً"، فإن هذه المتغيرات الثلاثة ترتبط مع بعضها بالمعادلة:

$$pv = nRT \quad (1) \quad (R, n \text{ ثوابت})$$

ولنرى ما هي التعقيدات الناتجة عن ذلك، سنأخذ مثلاً رياضياً بحثاً.

مثال 1. لتكن $w = x^2 + y^2 + z^2$ ، حيث $z = x^2 + y^2$. احسب $\frac{\partial w}{\partial x}$.

النفاش.

(a) إذا فكرنا في x و y كمتغيرات مستقلة، فإنه بإمكاننا حساب $\frac{\partial w}{\partial x}$ بطريقتين مختلفتين:

(i) باستخدام $z = x^2 + y^2$ للتخلص من z ، فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

(ii) أو باستخدام قاعدة السلسلة، ولكن تذكر أن z هي دالة في x و y :

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z \cdot 2x \\ &= 2x + 2(x^2 + y^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الطريقتين متوافقتين.

(b) من ناحية أخرى، إذا فكرنا في x و z كمتغيرات مستقلة، فإنه مثلاً باستخدام الطريقة (i) أعلاه، سنخلص من y عن طريق العلاقة $y^2 = z - x^2$ ، ومنه نحصل على:

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 \\ &= z + z^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

في الحقيقة، هذه الأجوبة مختلفة. ولا يمكننا أن نحول إحداها إلى الأخرى باستخدام العلاقة:

$$z = x^2 + y^2$$

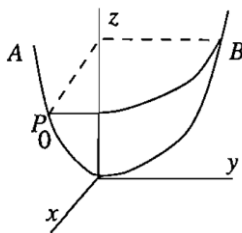
لذا هل سنتمكن من إيجاد الحل الصحيح لـ $\partial w / \partial x$ ؟

الإجابة هي: أنه لا يوجد جواب صحيح واحد، لأن المسألة لم توضح جيداً. فعندما تكون المتغيرات غير مستقلة، فإن تعبيراً مثل $\partial w / \partial x$ لا يمثل المعنى بشكل كامل.

ولرؤية السبب وراء ذلك، سنقوم بتفسير المثال السابق هندسياً. والقول أن x, y, z تحقق العلاقة $z = x^2 + y^2$ يعني أن النقطة (x, y, z) تقع على سطح مجسم القطع المكافئ الدوراني الناتج من دوران $z = y^2$ حول المحور z .

والدالة:

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$



تحتسب مربع المسافة من نقطة المبدأ. ولنكون أكثر وضوحاً، سنفترض أننا عند نقطة البداية $P = P_0: (1, 0, 1)$ المشار إليها على الرسم، ونريد حساب $\partial w / \partial x$ عند هذه النقطة.

الحالة (a). إذا اعتبرنا x و y متغيرات مستقلة، فإنه لإيجاد $\partial w / \partial x$ ، سنجعل y ثابتة و x متغيرة. وبالتالي فإن النقطة P ستتحرك على المستوى xy باتجاه A ، على طول المسار الموضح. وطالما أن P تتحرك على طول هذا المسار، فمن الواضح أنه w ، مربع المسافة من نقطة المبدأ، تتزايد باستمرار: $\frac{\partial w}{\partial x} > 0$. وفي الحقيقة، الحسابات في (a) على الصفحة السابقة أظهرت أن: $\frac{\partial w}{\partial x} = 6$.

الحالة (b). إذا اعتبرنا x و z متغيرات مستقلة، فإنه لإيجاد $\partial w / \partial x$ ، سنجعل z ثابتة و x متغيرة. أما الآن فإن النقطة P تتحرك في المستوى $z = 1$ ، على طول المسار الدائري باتجاه B . وطالما أن P تتحرك على هذا المسار، فإن مربع المسافة من نقطة المبدأ لن يتغير، ولذلك فإن $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ ، وهذه النتيجة هي نفسها التي حسبناها في (b) سابقاً.

وخلاصة القول أن قيمة $\partial w / \partial x$ تعتمد على المتغيرات التي نختارها لتكون مستقلة، وذلك لأننا في الحقيقة نحسب معدلات تغير مختلفة، بينما تتحرك P على مسارات مختلفة.

لا يوجد سوى طريقة واحدة لتجاوز هذه الصعوبة. عندما يطلب منا إيجاد $\partial w / \partial x$ ، فإنه يجب علينا مباشرة تحديد المتغيرات التي سنعتبرها مستقلة. ويتم هذا الأمر باستخدام الترميز التالي:

الحالة (a): x و y هي متغيرات مستقلة: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$

الحالة (b): x و z هي متغيرات مستقلة: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_z$

وكل منهما يُقرأ على النحو الآتي: "المشتق الجزئي لـ w بالنسبة لـ x ، حيث y (لـ الحالة b) ثابتة". لاحظ أنه في كلتا الحالتين فإن الحرفين السفليين يشيران إلى المتغيرات المستقلة. وإذا كان لدينا متغيرات أكثر، فإننا سنستخدم ترميزاً مماثلاً. فعلى سبيل المثال، إذا كانت:

$$w = f(x, y, z, t) \quad \text{حيث} \quad xy = zt \quad (2)$$

فإن ثلاثة فقط من المتغيرات x, y, z, t يمكن أن تكون مستقلة؛ والمتغير الرابع سيحسب بالمعادلة الموجودة على الطرف الأيمن لـ (2). وهكذا، فإنه بإمكاننا كتابة تعبيراتٍ مثل:

"مشتق جزئي لـ w بالنسبة لـ x ، حيث أن y و t ثابتين" $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,t}$

"مشتق جزئي لـ w بالنسبة لـ y ، حيث أن x و z ثابتين" $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$

في التعبير الأول، x, y, t هم المتغيرات المستقلة. أما في التعبير الثاني، فإن x, y, z هم المتغيرات المستقلة.

2. التفاضلات مقارنة مع قاعدة السلسلة.

هناك طريقة بديلة لحساب المشتقات الجزئية باستخدام التفاضل الكامل. سنوضح ذلك بمثال، أولاً باستخدام قاعدة السلسلة، ثم سنعيد الحل باستخدام التفاضل.

تعريفاً، فإن تفاضل دالة ما بمتغيرات عدة، من مثل $w = f(x, y, z)$ ، هو:

$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (3)$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثلاثة f_x, f_y, f_z هي المشتقات الجزئية الرسمية، أي أن المشتقات يتم حسابها كما لو أن x, y, z متغيرات مستقلة.

مثال 2. أوجد $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}$ ، حيث $w = x^3y - z^2t$ و $xy = zt$.

الحل 1. باستخدام قاعدة السلسلة والمعادلتين المذكورتين في المسألة، فإنه لدينا:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zt \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zt \frac{x}{t} = x^3 - 2zx$$

الحل 2. نأخذ التفاضل للطرفين في كل من المعادلتين المذكورتين في المسألة:

$$dw = 3x^2y dx + x^3 dy - 2zt dz - z^2 dt \quad (4) \quad y dx + x dy = z dt + t dz$$

وحيث أن المسألة تشير إلى أن x, y, t هي متغيرات مستقلة، فإننا نزيل dz من المعادلات (4) عن طريق ضرب المعادلة الثانية بـ $2z$ ، ثم إضافتها إلى المعادلة الأولى، ومن ثم تجميع الحدود، وهذا يعطينا:

$$dw = (3x^2y - 2zy)dx + (x^3 - 2zx)dy + z^2 dt$$

وبمقارنتها مع (3) - بعد استبدال z بـ t في (3) - فنرى أن:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,y} = z^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zx, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,t} = 3x^2y - 2zy$$

(المشتقات الجزئية الفعلية هي نفسها المشتقات الجزئية الرسمية w_t, w_y, w_x وذلك لأن x, y, t هي متغيرات مستقلة.)

لاحظ أن طريقة التفاضل هنا احتاجت القيام بحسابات أكثر قليلاً، ولكنها أنتجت ثلاثة مشتقات، وليس واحدة فقط؛ وهذا شيء جيد إذا كنت تريد معرفة الثلاثة كلها، ولكن سيصبح هذا مضيقاً للوقت إذا كنت لا تريد معرفتها جميعها. الشيء المهم الذي يجب أن يوضع في الاعتبار بشأن هذه الطريقة هو أن يتم التعامل مع التفاضل كمتجهات، حيث $dx, dy, dz, \dots$ تغلب دور $i, j, k, \dots$ ومنه:

D1. التفاضل يمكن أن يتم إضافته، وطرحه، وضربه بدالات عددية.

D2. إذا كانت المتغيرات $x, y, \dots$ هي متغيرات مستقلة، فإن تفاضلين سيكونان متساويين فقط فقط إذا كانت معاملتهما المتوافقة متساوية:

$$(5) \quad A dx + B dy + \dots = A_1 dx + B_1 dy + \dots \Leftrightarrow A = A_1, B = B_1, \dots$$

D3. يمكن التعويض بأحد التفاضلين في الآخر.

ملاحظات.

1. في المثال 2، الحل 2، قمنا باستخدام العمليات في **D1** للقيام بالعمليات الحسابية. واستخدمنا **D2** في الخطوة الأخير، وذلك بالاستفادة من حقيقة أن x, y, t متغيرات مستقلة. يمكننا القيام بالعمليات الحسابية مستخدمين **D3** بدلاً من ذلك. عن طريق حل المعادلة الثانية في (4) من أجل dz ، ثم التعويض بها في المعادلة الأولى. **D3** تعتبر نتيجة لقاعدة السلسلة. وفي القسم القادم، سنعطى توضيحات بكيفية استخدامها.
2. الميزة الرئيسية للقيام بالحساب باستخدام التفاضل هو أنه لا حاجة لمعرفة ما إذا كانت المتغيرات مستقلة أم لا، أو أي المتغيرات يعتمد على الآخر؛ ستلك الطريقة إلى ذلك تلقائياً. وهناك بعض الأمثلة التي ستوضح ذلك.
3. إذا كانت المتغيرات غير مستقلة، فإن **D2** وبشكل قاطع ستكون غير صحيحة؛ المعادلة الثانية في (4) تعطي مثلاً معاكساً.

لاحظ أنه في **D1** أيضاً، لا توجد أية محاولة لإدخال عمليتي "ضرب" أو "قسمة" التفاضل في قائمة العمليات. حيث أنه إذا كانت u و v دالات بعدة متغيرات، فإن "حاصل ضربهما" $du dv$ لا معنى له كتفاضل، والأمر ذاته بالنسبة لحاصل قسمتهما du/dv ، والذي، على الرغم مما يبدو الأمر عليه،

لا يرتبط بشكل عام بأي مشتق، أو دالة، أو حتى تعريف. (بالنسبة للضرب النقطي/السلمي والضرب الاتجاهي للمتجهات فإنه لا يوجد نظير أولي لهما، ومع ذلك فسترى في مساقات الهندسة التفاضلية المتقدمة نوع آخر من ضرب التفاضلات والذي سيعرّف ويستخدم من أجل التكامل المتعدد).

المثال 3. لتكن $w = x^2 - yz + t^2$

حيث x, y, z, t تحقق المعادلتين $z^2 = x + y^2$ و $xy = zt$.

فباستخدام هذه المعادلات، فإنه بإمكاننا التعبير عن z أولاً ثم t بدلالة كل من x و y ؛ وهذا يعني أن w أيضاً يمكن التعبير عنها بدلالة x و y . وبالتالي أوجد متجه الميل $\nabla w(x, y)$ ، بدون حساب $w(x, y)$ صراحةً.

الحل. بما أننا نحتاج إلى كلا المشتقتين الجزئيتين $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ ، فمن المنطقي استخدام طريقة التفاضل. وبالتالي فإن أخذ التفاضل لـ w والتفاضل للمعادلتين اللتين تربطان المتغيرات، يعطينا الآتي:

$$dw = 2x dx - z dz - y dy + 2t dt \quad (6)$$

$$x dy + y dx = z dt + t dz$$

$$2z dz = dx + 2y dy$$

ولكننا نريد أن تكون x و y متغيرات مستقلة. لذا سنستخدم العمليات في **D1**، ونقوم أولاً بالتخلص من dt من خلال حلها في المعادلة الثانية، والتعويض بها في المعادلة الأولى؛ ثم التخلص من dz من خلال حلها في المعادلة الأخيرة والتعويض بها في المعادلة الأولى؛ وبالتالي تكون النتيجة:

$$dw = \left(2x - \frac{y}{2z} + \frac{2ty}{z} - \frac{t^2}{z^2}\right) dx + \left(-z - \frac{y^2}{z} + \frac{2xt}{z} - \frac{2t^2y}{z^2}\right) dy \quad (7)$$

حيث أن x و y متغيرات مستقلة، فمقارنة تعبير dw في (7) و (3) (مستخدماً x و y)، ومن ثم استخدام **D2**، تظهر أن المعاملين في (7) هما المشتقات الجزئية w_x و w_y على الترتيب، أي أنهما مركبتا الميل ∇w .

المثال 4. بفرض أن المتغيرات x, y, z تحقق المعادلة $g(x, y, z) = 0$. افترض أن النقطة $P: (1, 1, 1)$ تقع على السطح $g = 0$ ، وذلك حيث أن $(\nabla g)_P = \langle -1, 1, 2 \rangle$. ولتكن $f(x, y, z)$ دالة أخرى، بحيث تكون $(\nabla f)_P = \langle 1, 2, 1 \rangle$.

أوجد ميل الدالة $w = f(x, y, z(x, y))$ للمتغيرين المستقلين x و y ، عند النقطة $x = 1$ ، $y = 1$.

الحل. باستخدام التفاضلات، فإنه يصبح لدينا: (من خلال (3) وفرضياتنا)

$$(dw)_P = dx + 2dy + dz \quad ; \quad (dg)_P = -dx + dy + 2dz = 0$$

حيث $dg = 0$ لكل x, y, z

بالتخلص من dz من خلال حل المعادلة الثانية والتعويض بها في المعادلة الأولى، أو عن طريق قسمة المعادلة الثانية على 2 وطرحها من المعادلة الأولى، فإننا نحصل على:

$$(\nabla w)_P = \frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} \quad ; \quad (dw)_P = \frac{3}{2}dx + \frac{3}{2}dy$$

3. التفاضل الجزئي المجرد؛ قواعد مرتبطة بالمشتقات الجزئية.

في التطبيقات غالباً ما تكون الدالة w غير معطاة صراحةً، والأمر نفسه بالنسبة للمعادلات التي تربط المتغيرات. لذلك يجب عليك أن تكون قادراً على التعامل مع دوال ومعادلات معطاة بشكل تجريدي. تعتبر الفكرة التي ذكرت سابقاً صالحة جداً، كما ستري في التوضيح القادم. ومع ذلك، فيجب (كما في القسم 2) التمييز بين أمرين:

المشتقات الجزئية /الرسمية، والمكتوبة هنا على النمط f_x ، f_y ، ... (والمحسوبة كما لو كانت جميع المتغيرات مستقلة)

المشتقات الجزئية /الفعلية، والمكتوبة هنا على النمط $\partial f / \partial x$ ، ...، والتي تأخذ في الاعتبار أي علاقات تكون بين المتغيرات.

المثال 5. إذا كانت $f(x, y, z) = xy^2z^4$ ، حيث $z = 2x + 3y$

ومنه فإن المشتقات الجزئية الرسمية هي:

$$f_z = 4xy^2z^3 \quad , \quad f_y = 2xz^4 \quad , \quad f_x = y^2z^4$$

بينما ثلاثة، من عدة مشتقات جزئية فعلية محتملة، هي: (استخدمنا هنا قاعدة السلسلة)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = f_x + f_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = y^2z^4 + 8xy^2z^3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = f_y + f_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 2xyz^4 + 12xy^2z^3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x = f_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + f_z = \frac{2}{3}xyz^4 + 4xy^2z^3$$

القواعد التي تربط المشتقات الجزئية. هذه القواعد كثيراً ما تستخدم في التطبيقات، خاصة في الديناميكا الحرارية. حيث سنستخدمها هنا كمبرر لمزيد من التدريب على قاعدة السلسلة والتفاضل. بالنظر إلى الديناميكا الحرارية، سنفترض مجموعة متغيرات $t, u, v, w, x, y, z, \dots$ مرتبطة مع بعضها بعدة معادلات على الطريقة التالية:

• أي متغيرين هما مستقلين.

• أي ثلاث متغيرات ستكون مرتبطة مع بعضها بمعادلة.

وهكذا، فإنه يمكن اختيار أي اثنين من هذه المتغيرات ليكونا مستقلين، ومن ثم يمكن التعبير عن كل متغير من المتغيرات المتبقية بدلالة هذين المتغيرين المستقلين.

سنكتب كل قاعدة على شكلين – الشكل الثاني هو الشكل الذي يستخدم في العادة، بينما الشكل الأول أسهل من ناحية التذكر. (القاعدتين الأوليتين بسيطتان في كلا شكليهما.)

$$\text{قاعدة المقلوب} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{(\partial y / \partial x)_z} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \quad (8a,b)$$

$$\text{قاعدة السلسلة} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{(\partial x / \partial t)_z}{(\partial y / \partial t)_z} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_z \quad (9a,b)$$

$$\text{قاعدة الحلقة (الدورة)} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{(\partial x / \partial z)_y}{(\partial y / \partial z)_x} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (10a,b)$$

لاحظ كيف تم تشكيل العوامل المتتالية في قاعدة الحلقة: لقد تم استخدام المتغيرات على الترتيبات المتعاقبة التالية x, y, z ؛ y, z, x ؛ z, x, y ؛ حيث أنها تُبدل دورياً، مما يفسر سبب تسميتها بذلك.

برهان هذه القواعد. القاعدتان الأوليتان بسيطتان: بما أن z وُضعت ثابتة، فإن كل متغير يصبح دالة في متغير آخر واحد فقط، و(9) ليست إلا قاعدة السلسلة لمتغير واحد. وبالتالي فإن (8) ليست إلا حالة خاصة من (9) حيث تكون $x = t$.

قاعدة الحلقة (الدورة) تعتبر أقل وضوحاً – على الطرف الأيمن تبدو تقريباً مثل قاعدة السلسلة، ولكن هناك متغيرات مختلفة قد تم تثبيتها في كل من التفاضلات، وهذا يؤدي إلى تغييرها بشكل كامل. لإثبات ذلك، سنفترض $f(x, y, z) = 0$ هي المعادلة المُحققة من قبل x, y, z ؛ وبالتالي فإن جعل y و z متغيرات مستقلة واشتقاق $f(x, y, z) = 0$ بالنسبة لـ y ، يعطي ما يلي:

$$f_x \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z + f_y = 0 \quad \text{لذلك} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = -\frac{f_y}{f_x} \quad (11)$$

وأيضاً، إبدال المتغيرات في (11) وضرب المعادلات الثلاثة الناتجة مع بعضها يعطي (10a):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -\frac{f_x}{f_y} \cdot -\frac{f_y}{f_z} \cdot -\frac{f_z}{f_x} = -1$$

المثال 6. بفرض أن $w = w(x, r)$ ، حيث $r = r(x, \theta)$.

أعط تعبيراً لـ $\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_\theta$ بدلالة المشتقات الجزئية لـ w و r .

الحل. من الواضح أن المتغيرات المستقلة ستكون r و θ ، وذلك بما أن أنهما يقعان في الجزء السفلي من المشتق الجزئي، حيث x تعتمد على كليهما. وبما أنه ينظر إلى θ على أنها ثابتة، فإن قاعدة السلسلة تعطي التالي:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_\theta &= w_x \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_\theta + w_r \\ \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_\theta &= \frac{1}{(\partial r / \partial x)_\theta} \end{aligned}$$

وذلك بالاستناد إلى قاعدة المقلوب (8). ونتيجة لذلك في النهاية:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_\theta = \frac{w_x}{r_x} + w_r$$

4. **تغيير المتغيرات المستقلة.*** بالنسبة للذين سينتقلون لدراسة الديناميكا الحرارية، فإن الاستخدام الرئيسي لقواعد القسم السابق هو تغيير القوانين الفيزيائية المُعبر عنها بدلالة زوج واحد من المتغيرات المستقلة ليُعبر عنها بزوج آخر أكثر ملائمة للمسألة المطروحة.

في الديناميكا الحرارية، من المتغيرات المرتبطة بالغاز الحبيس (المحصور): p (الضغط)، V (الحجم)، T (درجة الحرارة)، U (الطاقة الداخلية)، S (الانتروبي أو الاعتلاج)، H (المحتوى الحراري). حيث يمكن اعتبار أي اثنين منها متغيرات مستقلة، وبالتالي فإن قيمة كل منهما يمكنها أن تحدد باقي المتغيرات. ولتجنب أي اضطراب، فإنه من الأفضل كتابة المسألة العامة لدينا بدلالة مجموعة من المتغيرات المحايدة—سنستخدم u, v, w, x, y . ثم سيصبح بإمكاننا صياغة المسألة بهذه الطريقة: المشتق الجزئي $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C$ ستكون معطاة، حيث A, B, C هي ثلاثة من هذه المتغيرات، ونريد استخدام x و y كمتغيرات مستقلة جديدة؛ أي نريد التعبير عن $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C$ بدلالة المشتقات الجزئية التي تبدو مثل $\left(\frac{\partial^*}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial^*}{\partial y}\right)_x$ ، حيث * تستخدم لأي متغير من المتغيرات لدينا.

يبدو أنه سيكون لدينا العديد من الحالات، ولكن بعيداً عن الحالات البديهية، فإن أكثر الحالات شيوعاً يتم التعامل معها باستخدام قواعد القسم السابق. من الحالات البديهية هي عندما تكون A, B, C متساوية:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C = \begin{cases} 1, & A = B \\ 0, & A = C \\ \text{غير معرفة}, & B = C \end{cases} \quad (12)$$

وأيضاً هناك حالتين بديهيتين أخرتين، وهي عندما يكون B و C هما x و y ، على أي ترتيب كان، حيث سيكون المشتق الجزئي جاهزاً على الشكل المطلوب.

باقي الحالات الأخرى هي حالات غير بديهية، ولكنها مشمولة أيضاً بالقواعد. تذكر أن x و y ستكونان المتغيرات الجديدة، وبالتالي فإن الحالات الأكثر حدوثاً هي هاتين الحالتين:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_x = \frac{(\partial A / \partial y)_x}{(\partial B / \partial y)_x} \quad \text{(قاعدة السلسلة (9))} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u = \frac{(\partial x / \partial u)_y}{(\partial y / \partial u)_x} = \frac{(\partial u / \partial y)_x}{(\partial u / \partial x)_y} \quad \text{(بالاستناد إلى (10b) و (9b))} \quad (14)$$

في الأعلى، يمكن التبديل بين x و y ؛ A, B, C تُعبر عن أي متغير؛ u, v, w يمكن أن تكون أي متغير ما عدا x و y . ويمكن استخدام قاعدة المقلوب كمرحلة تمهيدية لوضع المشتق الجزئي المعطى في واحدة من الصيغ أعلاه.

المثال 7. أحد قوانين الديناميكا الحرارية يمكن التعبير عنه بالمعادلة:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0$$

فما هي معادلة هذا القانون عندما يكون كل من V و T متغيرات مستقلة؟

الحل. بالنظر إلى كل مشتق على حدة، فإن الأولى لها الشكل (14) وتحتاج إلى قاعدة السلسلة؛ أما الثانية فهي على الشكل (14) وتحتاج إلى قاعدة الحلقة (الدورة)؛ والأخير تحتاج فقط إلى قاعدة المقلوب. وباستخدام ذلك كله، فإن المعادلة ستتحول إلى:

$$\frac{\partial U/\partial V}{\partial p/\partial V} - T \frac{\partial p/\partial T}{\partial p/\partial V} + \frac{p}{\partial p/\partial V} = 0$$

أما الحروف السفلية فهي غير مهمة، إذا كان معلوماً لدينا أن T و V هي متغيرات مستقلة؛ ومع ذلك فلا يوجد أي ضرر بتضمينها وإزالة المقام المشترك، والذي يعطينا في النهاية:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + p = 0$$

كما في الصيغة التي يتبعها القانون عندما يشير إلى المتغيرات T و V .

5. قواعد لإضافية.* بهدف إكمال الفكرة، سنقوم بإضافة قانونين إضافيين مما سيجعلك قادراً على القيام باختيارات غير شائعة للمتغيرات المستقلة.

لتوضيح هذين القانونين، سنحتاج إلى مُحدد يدعى **جاكوبيان**. ما يلي، هو مفهوم وترميز للدالتين $u(x, y)$ و $v(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \quad (\text{مُحدد جاكوبيان}) \quad (15)$$

أما بالنسبة لثلاث دوال بثلاث متغيرات، الخ. فإن المفهوم سيكون مشابهاً.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \quad (16a,b)$$

قاعدة جاكوبيان

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_w = \frac{\partial(u,w)/\partial(x,y)}{\partial(v,w)/\partial(x,y)} \quad (17)$$

قاعدة جاكوبيان الثانية

سنترك برهان قاعدة جاكوبيان (16a) كتمرين جيد في استخدام التفاضل؛ الصيغة (16b) ناتجة منها من خلال تطبيق قاعدة السلسلة (9b) والمفهوم (15).

يمكن إثبات قاعدة جاكوبيان الثانية مباشرةً إما باستخدام التفاضل أو قاعدة السلسلة الأساسية (القياسية) للدالات بعدة متغيرات. إنها أساس جميع القواعد: والقواعد الأربعة الأخرى يمكن اشتقاقها منها بجعل بعض المتغيرات مساوية لأخرى.

كما في القسم 4، هذه القواعد الجديدة تسمح بالخيارات المتبقية للمتغير المستقل:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y - \frac{(\partial u/\partial y)_x}{(\partial v/\partial y)_x} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \quad (18)$$

بواسطة (16b)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_w = \frac{\partial(u,w)/\partial(x,y)}{\partial(v,w)/\partial(x,y)} \quad (19)$$

بواسطة (17)

تمارين: القسم 2J