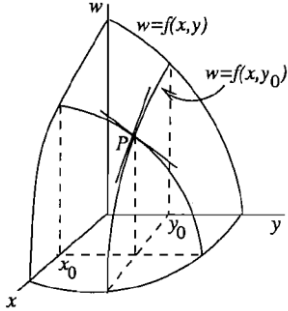


TA. التقريب باستخدام المماس

1. المشتقات الجزئية.

لتكن $w = f(x, y)$ هي دالة ذات متغيرين. رسمها البياني عبارة عن سطح في الفضاء xyz ، كما في الصورة المجاورة.



نثبت قيمة $y = y_0$ واجعل x هي المتغيرة فقط. فتحصل على دالة بمتغير واحد،

$$(1) \quad w = f(x, y_0) \text{ ، هي الدالة الجزئية من أجل } y = y_0$$

رسمها البياني عبارة عن منحنى في المستوي العمودي $y = y_0$ ، والذي ميله عند النقطة P ، حيث تكون $x = x_0$ ، يعطى بالمشتقة التالية:

$$(2) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (\text{أو}) \quad \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x_0}$$

نطلق على (2) اسم **المشتقة الجزئية لـ f بالنسبة لـ x عند النقطة (x_0, y_0)** ؛ الطرف الأيمن لـ (2) هو الترميز الأساسي لذلك. المشتقة الجزئية ما هي إلا المشتقة الاعتيادية للدالة الجزئية -حيث تُحسب عن طريق جعل واحد من المتغيرات ثابت ثم الاشتقاق بالنسبة للمتغير الآخر. توجد بعض الترميزات الأخرى للمشتقة الجزئية، وهي:

$$f_x(x_0, y_0) , \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} , \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 , \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0$$

التعبير الأول هو الأنسب عند تضمين نقطة معينة؛ التعبير الثاني أكثر استخداماً في العلم والهندسة، حيث يتم التعامل مع العلاقات بين المتغيرات دون ذكر الدالة بشكلٍ صريح؛ التعبيران الثالث والرابع يشيران إلى النقطة باستخدام الرمز السفلي فقط.

بشكلٍ مشابه، بتثبيت قيمة $x = x_0$ وجعل y هي المتغيرة، فإننا نحصل على الدالة الجزئية $w = f(x_0, y)$ ، والتي رسمها البياني يقع في المستوي العمودي $x = x_0$ ، وأيضاً ميلها عند النقطة P هو **المشتقة الجزئية لـ f بالنسبة لـ y** ؛ وترميزاتها هي:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, f_y(x_0, y_0), \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

المشتقات الجزئية $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ تعتمد على (x_0, y_0) ، وبالتالي على معادلات x و y . بكتابتها على الشكل $\partial w / \partial x$ ، فإن المشتقات الجزئية تمثل معدل التغير لـ w بالنسبة لـ x وحدها، عند النقطة (x_0, y_0) : حيث تُخبرنا كم هي سرعة ازدياد w بالنسبة لزيادة x ، وهذا عندما تكون y ثابتة. بالنسبة لدالة بثلاث متغيرات أو أكثر، $w = f(x, y, z, \dots)$ ، فإنه لا يمكننا القيام برسمها، ولكن المغزى من الاشتقاق الجزئي يبقى نفسه: أي لتعريف المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x ، فمثلاً، اجعل جميع المتغيرات الأخرى ثابتة، ثم خذ المشتقة الاعتيادية بالنسبة لـ x ؛ الترميزات هي نفسها كما في الأعلى:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \frac{d}{dt} f(x, y_0, z_0, \dots) = f_x(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

يحتوي الكتاب على أمثلة توضح كيفية حساب المشتقات الجزئية لدوال بمتغيرين أو ثلاث متغيرات.

2. المستوي المماس.

بالنسبة لدالة ذات متغير واحد، $w = f(x)$ ، فإن الخط المماس لرسمها البياني عند النقطة (x_0, w_0) هو الخط الذي يمر عبر النقطة (x_0, w_0) وميله يساوي $\left(\frac{dw}{dx}\right)_0$.

بالنسبة لدالة ذات متغيرين، $w = f(x, y)$ ، فإن التناظرية الطبيعية هي المستوي المماس لرسمها البياني عند النقطة (x_0, y_0, w_0) . ولكن ماهي معادلة هذا المستوي المماس؟ بالرجوع إلى الرسم البياني في الصفحة السابقة، فقد رأينا أن المستوي المماس:

$$(i) \quad \text{يجب أن يمر عبر النقطة } (x_0, y_0, w_0), \text{ حيث تكون } w_0 = f(x_0, y_0)$$

$$(ii) \quad \text{يجب أن يحتوي على الخطوط المماسية للرسم البيانية للدالتين الجزئيتين - وهذا يكون صحيحاً إذا كان للمستوي نفس الميل التي لدى السطح، وذلك في الاتجاهات } i \text{ و } j.$$

باستخدام هذين الشرطين، فإنه من السهل إيجاد معادلة للمستوي المماس. المعادلة العامة لمستوي ما يمر بالنقطة (x_0, y_0, w_0) هي: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(w - w_0) = 0$.

لنفترض أن المستوي لم يكن عمودياً؛ بالتالي $C \neq 0$ ، ومنه فإنه بإمكاننا القسمة على C وإيجاد الحل من أجل $w - w_0$ ، لنحصل في النهاية على:

$$b = B/C, a = A/C, w - w_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad (3)$$

المستوي يمر عبر (x_0, y_0, w_0) ؛ فما هي قيم المعاملات a و b التي تجعل منه مماساً للرسم البياني أعلاه؟

لدينا: a = ميل المستوي (3) في الاتجاه i "وذلك بإدخال $y = y_0$ في (3)"

= ميل الرسم البياني في الاتجاه i "بالرجوع إلى (ii) أعلاه"

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \text{"بالرجوع إلى مفهوم المشتقة الجزئية"}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = b$$

لذلك فإن معادلة المستوي المماس لـ $w = f(x, y)$ عند النقطة (x_0, y_0) هي:

$$w - w_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \quad (4)$$

يحتوي الكتاب على أمثلة لحساب المستويات المماسية، باستخدام (4).

3. الصيغة التقريبية.

الاستخدام الأكثر أهمية للمستوي المماس هو إعطاء تقريب معين ويعتبر الصيغة الأساسية في دراسة الدوال متعددة المتغيرات – بطريقة أو بأخرى، كل شيء تقريباً يُتبع منها.

من البديهي أنه إذا بقينا بالقرب من (x_0, y_0, w_0) ، فإن الرسم البياني للمستوي المماس (4) سيكون تقريباً جيداً للرسم البياني للدالة $w = f(x, y)$. وبالتالي، إذا كانت النقطة (x, y) قريبة من (x_0, y_0) فإن:

$$f(x, y) \approx w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \quad (5)$$

ارتفاع المستوي المماس $\approx$ ارتفاع الرسم البياني

الدالة على الطرف الأيمن من (5) والتي رسمها البياني هو المستوي المماس، غالباً ما تسمى **بالنموذج الخطي** لـ $f(x, y)$ عند النقطة (x_0, y_0) : أي أنها الدالة الخطية التي تعطي أفضل تقريب لـ $f(x, y)$ وذلك لقيم (x, y) القريبة من (x_0, y_0) .

يتم الحصول على تركيب مماثل للتقريب (5) باستخدام الترميز Δ ؛ بحيث أننا إذا جعلنا:

$$\Delta w = w - w_0, \Delta y = y - y_0, \Delta x = x - x_0$$

فإن (5) تصبح:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y \quad (6)$$

هذه الصيغة تعطي التغير التقريبي في w عندما نطبق تغييراً بسيطاً على كلٍ من x و y .

الصيغة التقريبية المماثلة لدالة $w = f(x, y, z)$ ذات الثلاث متغيرات ستكون:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \Delta z \quad (7)$$

.0

لسوء الحظ، وهذا بالنسبة للدوال ذات الثلاث متغيرات أو أكثر، لن نستطيع الاعتماد على الحجة الهندسية في صيغة التقريب (7)؛ ولهذا السبب، فإنه من الأفضل إعادة صياغة الجدل حول (6) بشكلٍ لا نستخدم فيه المستويات المماسّة والهندسة، وبالتالي يمكننا تعميمه بالنسبة لعدة متغيرات. تم القيام بذلك في نهاية هذا القسم TA؛ أما بالنسبة إلى ما وصلنا إليه الآن، فسنتكفي بافتراض صحة (7) ونظيراتها ذات الأبعاد الأعلى.

المثالان القادمان سيكونان مثالين نموذجيين على كيفية استخدام صيغة التقريب. هناك بعض الأمثلة أيضاً في التمارين. في ما تبقى من دراستك للمشتقة الجزئية، ستري كيف تستخدم صيغة التقريب لاشتقاق الصيغ والنظريات الهامة.

المثال 1. أوجد مربعاً مقبولاً، مركزه عند (1,1)، بحيث تكون قيمة $w = x^3 y^4$ لن تتغير بأكثر من ± 1 .

الحل. باستخدام (6)، سنحسب بالنسبة للمشتقتين الجزئيتين:

$$w_y = 4x^3 y^3 \quad w_x = 3x^2 y^4$$

ولذلك، بحساب الجُزئيات عند (1,1) واستخدام (6)، فإننا نحصل على:

$$\Delta w \approx 3\Delta x + 4\Delta y$$

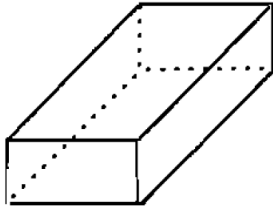
وهكذا، فإذا كانت $|\Delta x| \leq 0.01$ و $|\Delta y| \leq 0.01$ ، فإنه يجب أن نحصل على:

$$|\Delta w| \leq 3|\Delta x| + 4|\Delta y| \leq 0.07$$

والتي تقع بين الحدود. في النهاية، سيكون الجواب هي المربع ذي المركز عند (1,1) المعطى بـ:

$$|x - 1| \leq 0.01, \quad |y - 1| \leq 0.01$$

المثال 2. الأضلاع a, b, c لصندوقٍ مستطيل لها الأطوال 1، 2، 3 على الترتيب. لأي من هذه القياسات سيكون الحجم V أكثر حساسية (تأثراً)؟



الحل. $V = abc$ ، وباستخدام صيغة التقريب (7):

$$\Delta V \approx bc \Delta a + ac \Delta b + ab \Delta c$$

$$\approx 6 \Delta a + 3 \Delta b + 2 \Delta c, \quad \text{عند } (1,2,3)$$

وبالتالي فإنه أكثر حساسية (تأثراً) بالتغيرات الصغيرة في a ، وذلك لأن Δa لها أكبر معامل. (أي، إذا تغيرت قيمة أحد الأضلاع، لنقل بـ 0.01، فإن التغير في a هو الذي سيكون الأكثر تأثيراً في الحجم V ، أي بقيمة 0.06).

قد تبدو النتيجة – أن قيمة V ستكون أكثر حساسية (تأثراً) بطول الضلع الأقصر – متناقضة أو غير معقولة، ولكنها في الحقيقة نتيجة بديهية، وذلك بملاحظة كيف سيبدو شكل الصندوق.

مبدأ الحساسية. القيمة العددية لـ $w = f(x, y, \dots)$ والتي حُسبت عند $(x_0, y_0, \dots)$ ، ستكون أكثر حساسية (تأثراً) للتغيرات الصغيرة في المتغير الذي تكون عنده المشتقة الجزئية الموافقة $w_x, w_y, \dots$ لها أكبر قيمة مطلقة عند هذه النقطة.

4. انتقاد صيغة التقريب.

في البداية، صيغة التقريب (6) ليست دقيقة من الناحية الرياضية، حيث أن الرمز $\approx$ لا يحدد بالضبط مدى قرب الكميات على كلا طرفي الصيغة من بعضها. لتصحيح هذا الأمر، يجب تحديد الخطأ في التقريب. (يمكن القيام بذلك، ولكن غالباً ما يتم الاستغناء عنه.)

ولكن الاعتراض الأكثر جوهرية وأهمية هو أن نقاشنا حول التقريبات استند على افتراض أن المستوي المماس هو تقريب جيد للسطح عند النقطة (x_0, y_0, z_0) . ولكن هل هذا الافتراض صحيح؟

انظر للمسألة من وجهة النظر هذه. المستوي المماس حُسب على أنه المستوي الذي لديه نفس الميل الذي لدى السطح في الاتجاهات i و j . وهذا يعني أن التقريب (6) سيكون جيداً إذا تحركنا بعيداً عن (x_0, y_0) في الاتجاه i (وذلك بأخذ $\Delta y = 0$)، أو في الاتجاه j (بجعل $\Delta x = 0$). ولكن هل لدى المستوي المماس نفس الميل الذي لدى السطح في جميع الاتجاهات الأخرى أيضاً؟

بشكل بديهي، يجب أن نتوقع أن هذا الأمر صحيح إذا كان الرسم البياني لـ $f(x, y)$ عبارة عن سطح سلس عند (x_0, y_0) – أي ليس لديه أي نقاط حادة أو ثنيات، أو أن يبدو غريب الشكل. هذه هي الفرضية الرياضية والتي تضمن صحة ذلك.

فرضية السلسلة. نعتبر $f(x, y)$ سلسلة (ناعمة) عند النقطة (x_0, y_0) إذا:

$$(8) \quad f_x \text{ و } f_y \text{ مستمرتان في مستطيل ما مركزه عند } (x_0, y_0).$$

إذا صحت الفرضية (8)، فإن صيغة التقريب (6) ستكون صالحة.

بالرغم من أنه يمكن إنشاء أمثلة مرضية، فإنه عموماً، السبب الطبيعي لتفشل دالة من أن تكون سلسلة (بالتالي أن تفشل (6)) هو أن تفشل واحدة أو كلتا المشتقات الجزئية من أن توجد عند (x_0, y_0) . وبالتأكيد هذا يعني أنك لن تستطيع كتابة الصيغة (6)، إلا إذا كنت تشعر بالنعس! وهذا مثال بسيط على ذلك:

المثال 3. أين تكون $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ سلسلة؟

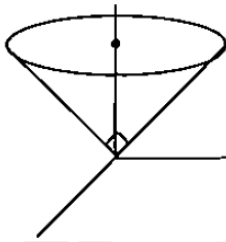
الحل. بالحساب، نحصل على:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

وهما مستمرتان عند كل النقاط ما عدا عند النقطة (0,0) حيث أنهما غير معرفتان هناك. لذا فإن الدالة سلسلة ماعدا عند نقطة المبدأ؛ صيغة التقريب (6) يجب أن تكون صالحة في كل مكان عدا عند نقطة المبدأ.

في الحقيقة، بالتحقيق في الرسم البياني لهذه الدالة، بحيث $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ فإن ذلك ينص على أن:

ارتفاع الرسم البياني فوق (x, y) = المسافة (x, y) من المحور w ،



إن الرسم البياني هو مخروط دائري قائم رأسه عند النقطة (0,0)، ومحوره على طول المحور w ، وزاوية الرأس هي زاوية قائمة. هندسياً، الرسم البياني له نقطة حادة عند نقطة المبدأ، لذا يجب أن لا يكون هناك مستوي مماس، وأيضاً صيغة التقريب (6) غير صالحة – حيث أنه لا توجد دالة خطية توجد التقريب عن رأس المخروط.

الجدال (الحجة) الغير هندسي حول صيغة التقريب.

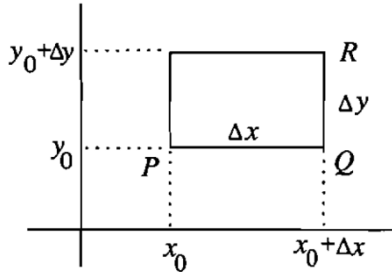
وعدنا سابقاً أن نهجاً غير هندسي لصيغة التقريب والذي من شأنه تعميم الأمر إلى الأبعاد العليا، خصوصاً بشأن صيغة الثلاث متغيرات (7). هذا النهج سيبين أيضاً سبب الحاجة إلى الفرضية (8) للسلسلة. هذا الجدل غير دقيق إلى الآن، لأنه يتضمن الرمز $\approx$ ، ولكن يمكن إعادة صقله ليصبح برهاناً (والذي ستراه في كتابك، بالرغم من أنه صعب الفهم).

يتم في استخدام صيغة التقريب بمتغير واحد وذلك لدالة قابلة للاشتقاق $w = f(u)$:

$$\Delta w = f'(u_0)\Delta u \quad (9) \quad , \quad \text{وهذا إذا كانت } \Delta u \approx 0$$

بدون استخدام منطق يعتمد على فضاء ثلاثي الأبعاد، سنحاول تبرير صيغة التقريب:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y \quad (6) \quad , \quad \text{وهذا إذا كانت } \Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0$$



سنحاول حساب التغير في w وذلك باعتبار أننا انتقلنا من P إلى R الموجودتين في الصورة المجاورة، حيث $P = (x_0, y_0)$ ، $R = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. يمكن التفكير في هذا التغير كوصول إلى مكان معين بخطوتين:

$$\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \quad (10)$$

الخطوة الأولى هي التغير في w نتيجة الانتقال من P إلى Q ، والخطوة الثانية هي التغير نتيجة الانتقال من Q إلى R . وباستخدام صيغة التقريب لمتغير واحد (9) نحصل على:

$$\Delta w_1 \approx \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Delta x \quad , \quad \Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_0) \Delta y \quad (11)$$

وبشكلٍ مماثل،

$$\Delta w_2 \approx \frac{d}{dy} f(x_0 + \Delta x, y) \Delta y \quad , \quad \Delta w_1 \approx f_y(x_0, y_0) \Delta y \quad (12)$$

إذا افترضنا أن f_y مستمرة (أي أن f سلسلة)، حيث أن الفرق بين الحدين على اليمين في السطرين الأخيرين سيكون على الشكل $\epsilon \Delta y$ ، والذي يعتبر مهماً مقارنةً بالحد نفسه. وتعويض كلا القيمتين التقريبتين (11) و (12) في (10) يعطينا صيغة التقريب (6).

ولجعل ذلك برهاناً، يجب تحليل شروط الخطأ في التقريبات، أو ببساطة، استبدال الرمز $\approx$ بمساواة اعتماداً على نظرية القيمة المتوسطة (الوسطى) في رياضيات المتغير الواحد.

يمكن تعميم هذا الجدل (الحجة) بسهولة بالنسبة لصيغ التقريب عالي الأبعاد، كما في (7)؛ ومرة أخرى ستكون الفرضية الضرورية هي فرضية السلسلة، والتي تنص على أن: المشتقات الجزئية الثلاثة w_x, w_y, w_z يجب أن تكون مستمرة بجوار النقطة (x_0, y_0, z_0) .