الامتحان 01

- مدة الامتحان: 85 دقيقة
- عدد المسائل: 4
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة
- لا يسمح باستخدام الكتب والملخصات

معادلات مفيدة

المعادلة التفاضلية العامة للمذبذبات:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f\,\cos(\omega t)$$

حلول المعادلة

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t + \alpha\right) + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 > \frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = (A + B\,t)\,e^{-\frac{\gamma t}{2}} + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 = \frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = A\,e^{-\Gamma_1 t} + B\,e^{-\Gamma_2 t} + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 < \frac{\gamma}{2}$$

حيث

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

و

$$x_{ss}(t) = A(\omega)\,\cos(\omega t - \delta(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{f}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\,\omega^2\right]^{1/2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{\gamma\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

المعادلات الأسّيّة المركبة:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

الصيغ المثلثيّة

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b \\
\sin a + \sin b &= 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a - \sin b &= 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a + \cos b &= 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a - \cos b &= -2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

معادلة موجة غير مشتتة:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

حيث (من أجل السلك):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ومن أجل الغاز:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{R\,T\,\gamma}{M}}$$

الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية والاستطاعة:

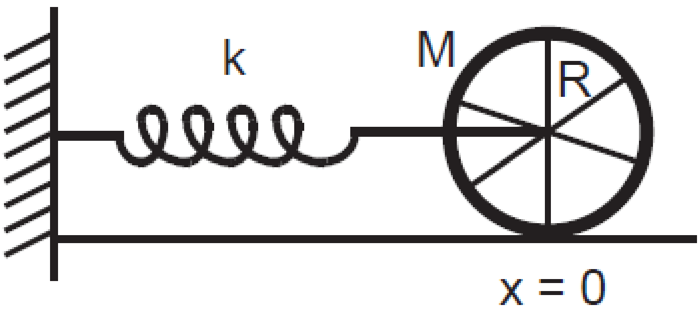
$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad P(t) = -T\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

معاملات الانعكاس والنفاذ:

$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \qquad T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

السؤال 1 (25 درجة): مذبذب توافقي بسيط

محور عجلة مرتبط بنابض ثابته k وكتلته مهملة. نصف قطر العجلة R وكتلتها الكلية M. كتلة أسلاك العجلة مهملة. تدور العجلة بدون انزلاق، أي أنها تتحرك بنفس مسافة دوران محيط العجلة. يهتز مركز كتلة العجلة (حركة توافقية بسيطة) في الاتجاه الأفقي حول نقطة توازنها x=0.



بدون انزلاق: عندما يتحرك مركز العجلة مسافة x، تدور العجلة زاوية $\theta = \frac{x}{2\pi R}2\pi = \frac{x}{R}$ راديان.
السرعة الزاويّة $\omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$، وبالتالي السرعة الاتجاهية لمركز العجلة v= ωR.

أ- (10 درجات) أوجد علاقة الطاقة الكلية بدلالة k وM وR و x(t) . بما أنّ كتلة أسلاك العجلة مهملة، ربما تفترض أن عزم عطالة الدوران حول المحور يساوي MR^2.

ب- (10 درجات) باستخدام مبدأ مصونية الطاقة، استنتج المعادلة التفاضلية للحركة.

ت- (5 درجات) ما هو التردد الزاوي للاهتزازات الصغيرة عند التوازن؟

السؤال 2 (20 درجة): الشروط الحدية في أنبوب

يمكن توصيف اهتزازات الضغط في أنبوب مجوّف طوله L مملوء بالهواء بمعادلة الموجة التالية:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

حيث p الموجبة هي الضغط المفرط (فوق 1 ضغط خارجي)، وz هي الاتجاه الطولي على طول الأنبوب. الأنبوب مفتوح من جهة ومغلق من جهة أخرى.

أ- (5 درجات) ما هو معنى v، وما هي قيمتها التقريبية (في متر\ثانية)؟

ب- (10 درجات) لنفترض أن الحل هو بالصيغة التالية:

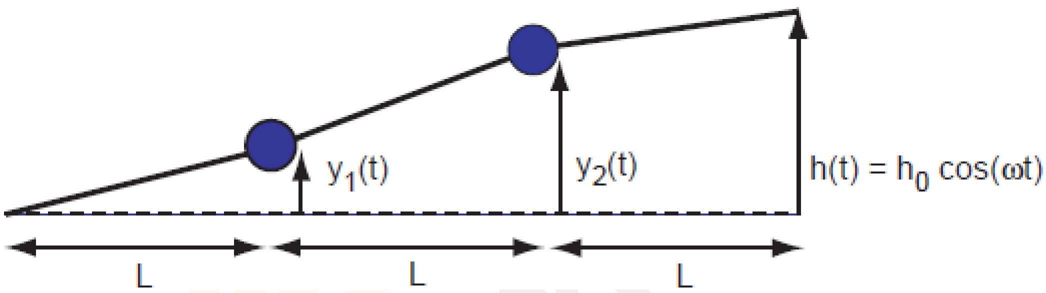
$$p(z,t) = [A\ coskz + B\ sinkz]cos\omega t$$

أوجد قيمة جميع المجاهيل (A وB وk وω) إذا كان $p\ (z=0,\ t=0) = p_0$. النهاية المغلقة للأنبوب عند z=0، والنهاية المفتوحة عند z=L.

ت- (5 درجات) من أجل L تساوي 0.5 متر، ما هي الترددات التقريبية (بالهرتز)، وما هي الأطوال الموجية التقريبية (بالمتر) للتوافقي الأول والثاني؟ (التوافقي الأول أيضاً يدعى الأساسي).

السؤال 3 (30 درجة): مذبذبات مترابطة مُحركة

حبتان صغيرتان كتلة كل منهما M تتموضعان بمسافة متساوية على طول سلك طوله 3L ومهمل الكتلة، وتخضعان لقوة شد منتظمة T. يمكن إهمال أي نوع من التخامد. إحدى النهايتين مثبتة بإحكام على حائط صلب بينما النهاية الأخرى مُحركة بشكل توافقي من خلال إزاحة عرضية صغيرة $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$.



أ- (10 درجات) لتكن الإزاحة العرضية من التوازن لكل حبة هي $y_1(t)$ و $y_2(t)$ على التوالي، استنتج معادلات الحركة لكل كتلة.

ب- (10 درجات) أوجد الترددات الزاويّة للأوضاع الطبيعية للاهتزاز.

ت- (5 درجات) استنتج سعة حالة الاستقرار لكل كتلة كدالة بالنسبة للتردد المحرِّك ω. ما هي قيم السعات من أجل $\omega=0$؟

ث- (5 درجات) ارسم بيانياً هذه السعات كدالة بالنسبة لـ ω. ارسم السعة كقيمة موجبة عندما تكون داخل الطور مع المحرك، وسالبة عندما تكون خارج الطور مع المحرك. إمّا يجب أن ترسم مخططين مختلفين أو يجب أن تشير بوضوح لمنحنيات الكتلة الأولى والثانية على الشكل. يجب أن توضح المخططات قيم السعات من أجل $\omega=0$.

السؤال 4 (25 درجة): قفزة الطور

مذبذب توافقي ذو تخامد ضعيف (ثابت التخامد له $\gamma \ll \omega_0$) كتلته m، ويُحرك بقوة خارجية مطبّقة F(t) (يمكنك افتراض وجود كتلة على النابض مع قوة خارجية F(t) مطبقة على الكتلة). تردد التحريك ω مطابق لتردد الرنين ω_0 للمذبذب.

حل حالة الاستقرار:

أ- (5 درجات) ما هي قيمة الإزاحة x(t) للمذبذب المُحرّك في حالة الاستقرار من أجل $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ ؟

ب- (10 درجات) إذا كانت القوة الخارجية $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$، ماذا تكون x(t) في حالة الاستقرار؟

ت- (10 درجات) افترض الآن أن القوة الخارجية هي:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \cos(\omega_0 t) & (t \leq 0) \\ F_0 \sin(\omega_0 t) & (t > 0) \end{cases}$$

ما هي قيمة x(t) من أجل t>0؟

يجب أن تفترض أنه من أجل $t \leq 0$، يهتز النظام وفق حل حالته المستقرة من أجل القوة الخارجية $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$.

تلميح: قيم x والسرعة الاتجاهية عند اللحظة t=0 تنتج من حل حالة الاستقرار في الجزء (أ). من أجل t>0 سيكون هناك حالة استقرار جديدة، بالإضافة للمرحلة العابرة/الزائلة.