حل الامتحان 01

- مدة الامتحان: 85 دقيقة
- عدد المسائل: 4
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة
- لا يسمح باستخدام الكتب والملخصات

معادلات مفيدة

المعادلة التفاضلية العامة للمذبذبات:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t)$$

حلول المعادلة

$$x(t) = A\, e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t + \alpha\right) + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 > \frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = (A + B\, t)\, e^{-\frac{\gamma t}{2}} + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 = \frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = A\, e^{-\Gamma_1 t} + B\, e^{-\Gamma_2 t} + x_{ss}(t) \qquad \omega_0 < \frac{\gamma}{2}$$

حيث

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

و

$$x_{ss}(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{f}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\, \omega^2\right]^{1/2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{\gamma\, \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

المعادلات الأسّيّة المركبة:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

الصيغ المثلثيّة

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b \\
\sin a + \sin b &= 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a - \sin b &= 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a + \cos b &= 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a - \cos b &= -2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

معادلة موجة غير مشتتة:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

حيث (من أجل السلك):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ومن أجل الغاز:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{R\,T\,\gamma}{M}}$$

الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية والاستطاعة:

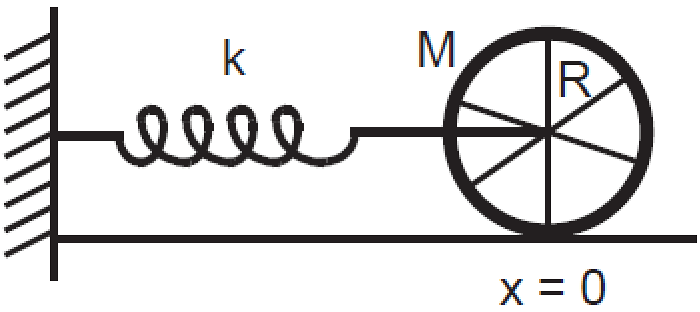
$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad P(t) = -T\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

معاملات الانعكاس والنفاذ:

$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \qquad T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

السؤال 1 (25 درجة): مذبذب توافقي بسيط

محور عجلة مرتبط بنابض ثابته k وكتلته مهملة. نصف قطر العجلة R وكتلتها الكلية M. كتلة أسلاك العجلة مهملة. تدور العجلة بدون انزلاق، أي أنها تتحرك بنفس مسافة دوران محيط العجلة. يهتز مركز كتلة العجلة (حركة توافقية بسيطة) في الاتجاه الأفقي حول نقطة توازنها x=0.



بدون انزلاق: عندما يتحرك مركز العجلة مسافة x، تدور العجلة زاوية $\theta = \frac{x}{2\pi R}2\pi = \frac{x}{R}$ راديان.

السرعة الزاويّة $\omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$، وبالتالي السرعة الاتجاهية لمركز العجلة v= ωR.

أ- (10 درجات) أوجد علاقة الطاقة الكلية بدلالة k وM وR و x(t) . بما أنّ كتلة أسلاك العجلة مهملة، ربما تفترض أن عزم عطالة الدوران حول المحور يساوي MR^2.

الطاقة الكليّة عند النقطة x تساوي:

$$E_{tot}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}kx^2 + M\dot{x}^2 \qquad (1)$$

ب- (10 درجات) باستخدام مبدأ مصونية الطاقة، استنتج المعادلة التفاضلية للحركة.

الاشتقاق بالنسبة للزمن dE/dt = 0 يعطي:

$$2M\ddot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

ت- (5 درجات) ما هو التردد الزاوي للاهتزازات الصغيرة عند التوازن؟

التردد الزّاوي يساوي:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}} \qquad (3)$$

السؤال 2 (20 درجة): الشروط الحدية في أنبوب

يمكن توصيف اهتزازات الضغط في أنبوب مجوّف طوله L مملوء بالهواء بمعادلة الموجة التالية:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

حيث p الموجبة هي الضغط المفرط (فوق 1 ضغط خارجي)، وz هي الاتجاه الطولي على طول الأنبوب. الأنبوب مفتوح من جهة ومغلق من جهة أخرى.

أ- (5 درجات) ما هو معنى v، وما هي قيمتها التقريبية (في متر\ثانية)؟

سرعة الصوت في الهواء $v \approx 340$ متر/ثانية (تمّ قياسها خلال المحاضرة في 5 أكتوبر).

ب- (10 درجات) لنفترض أن الحل هو بالصيغة التالية:

$$p(z,t) = [A\ coskz + B\ sinkz]cos\omega t$$

أوجد قيمة جميع المجاهيل (A وB وk وω) إذا كان $p\ (z=0,\ t=0) = p_0$. النهاية المغلقة للأنبوب عند z=0، والنهاية المفتوحة عند z=L.

موجة الصوت في هذا الأنبوب موضحة في الشكل التالي. حيث تمثل ξ موضع جزيئات الهواء، و $p \propto \frac{\partial \xi}{\partial z}$ هو الضغط فوق 1 جو).

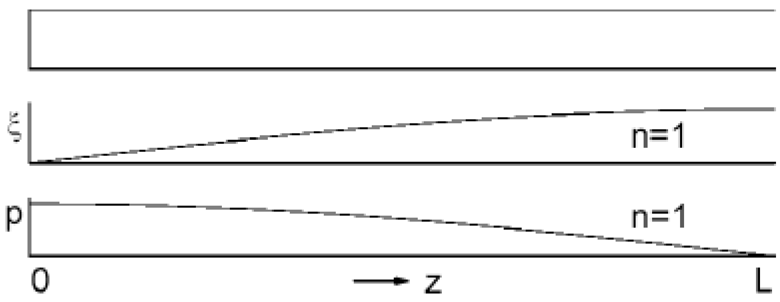
عند النهاية المغلقة يوجد دائماً عقدة في ξ وبطن موجة في p. عند النهاية المفتوحة، يوجد دائماً بطن موجة في ξ وعقدة في p. وبالتالي في الفضاء p يوجد لدينا فقط الحد cos لأنّ B=0.

الشروط الحدية هي:

$$p(z=0,t=0)=p_0=A \qquad (4)$$

وعند أي لحظة زمنية:

$$p(z=L,t)=0=p_0\cos k_nL \qquad (5)$$



لذلك

$$k_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L} \qquad (6)$$

ملاحظة: عند أي لحظة زمنية p(z=L,t) = 0 وبالتالي

$$0=p_0\cos k_nL+B\sin k_nL\Rightarrow B=\frac{-p_0}{\tan(k_nL)}$$

و $\tan(k_nL)=\pm\infty$ من أجل أي قيمة لـ n. وهذا متوافق مع B=0.

$$\omega = vk_n = \frac{(2n-1)\pi v}{2L} \tag{7}$$

بتعويض $p(z,t) = p_0 \cos kz \cos \omega t$ في معادلة الموجة، نجد:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -p_0 k \sin kz \cos \omega t \tag{8}$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -p_0 k^2 \cos kz \cos \omega t \tag{9}$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = -p_0 \omega \cos kz \sin \omega t \tag{10}$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -p_0 \omega^2 \cos kz \cos \omega t \tag{11}$$

وبالتالي

$$-p_0 k^2 \cos kz \cos \omega t = -\frac{1}{v^2} p_0 \omega^2 \cos kz \cos \omega t \tag{12}$$

والذي يعطينا

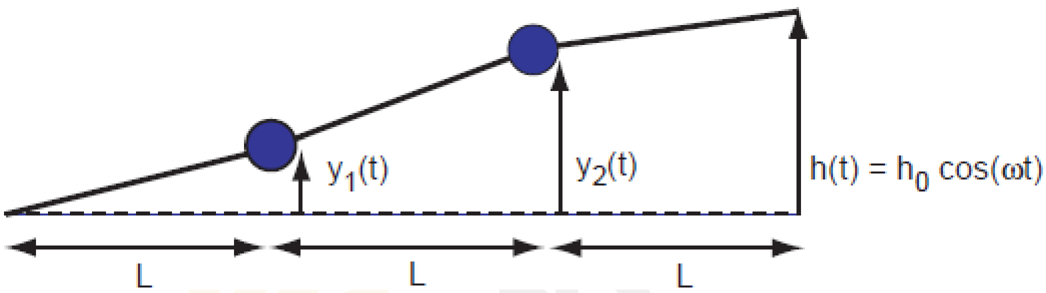
$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow \omega = vk \tag{13}$$

ت- (5 درجات) من أجل L تساوي 0.5 متر، ما هي الترددات التقريبية (بالهرتز)، وما هي الأطوال الموجية التقريبية (بالمتر) للتوافقي الأول والثاني؟ (التوافقي الأول أيضاً يدعى الأساسي).

$L = 0.5$ سم , $k_1 = \pi \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2$ متر $(\lambda_1 = 4L)$.
$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{340}{2} = 170$ هرتز
$k_2 = 3\pi \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2}{3}$ متر $\Rightarrow f_2 = \frac{340}{2/3} = 510$ هرتز $= 3f_1$.

السؤال 3 (30 درجة): مذبذبات مترابطة مُحركة

حبتان صغيرتان كتلة كل منهما M تتموضعان بمسافة متساوية على طول سلك طوله 3L ومهمل الكتلة، وتخضعان لقوة شد منتظمة T. يمكن إهمال أي نوع من التخامد. إحدى النهايتين مثبتة بإحكام على حائط صلب بينما النهاية الأخرى مُحركة بشكل توافقي من خلال إزاحة عرضية صغيرة $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$.



أ- (10 درجات) لتكن الإزاحة العرضية من التوازن لكل حبة هي $y_1(t)$ و $y_2(t)$ على التوالي، استنتج معادلات الحركة لكل كتلة.

معادلات الحركة لكل كتلة هي:

$$M\ddot{y}_1 = -\tau\sin\theta_1 + \tau\sin\theta_2 \tag{14}$$
$$M\ddot{y}_2 = -\tau\sin\theta_2 + \tau\sin\theta_3 \tag{15}$$

باستخدام تقريب الزاوية الصغيرة حيث $\sin\theta \approx \tan\theta$ ، نحصل على:

$$\sin\theta_1 \approx \frac{y_1}{L} \qquad \sin\theta_2 \approx \frac{y_2 - y_1}{L} \qquad \sin\theta_3 \approx \frac{y_2 - h}{L}$$

بأخذ $h(t) = h_0\cos\omega t$ و $\omega_0^2 = \frac{\tau}{ML}$، تكون معادلات الحركة:

$$\ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 = 0 \tag{16}$$
$$\ddot{y}_2 + 2\omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 = \omega_0^2 h_0\cos\omega t \tag{17}$$

ب- (10 درجات) أوجد الترددات الزاويّة للأوضاع الطبيعية للاهتزاز.

بإدخال الحلول التجريبية للصيغة $y_i(t) = C_i \cos\omega t$ إلى المعدلات التفاضلية، نحصل على:

$$\begin{pmatrix} (2\,\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (2\,\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2\, h_0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ترددات الأوضاع الطبيعية تُعطى بجذور محدد المصفوفة، أي:

$$(2\,\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,\omega_0^2 - \omega^2 = \pm\omega_0^2 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_L^2 = \omega_0^2 \tag{20}$$

$$\omega_H^2 = 3\,\omega_0^2 \tag{21}$$

ت- (5 درجات) استنتج سعة حالة الاستقرار لكل كتلة كدالة بالنسبة للتردد المحرِّك ω. ما هي قيم السعات من أجل ω=0؟

باستخدام قاعدة "كرامر":

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2\, h_0 & (2\,\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix}}{(\omega_0^2 - \omega^2)\,(3\,\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0^4\, h_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\,(3\,\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{22}$$

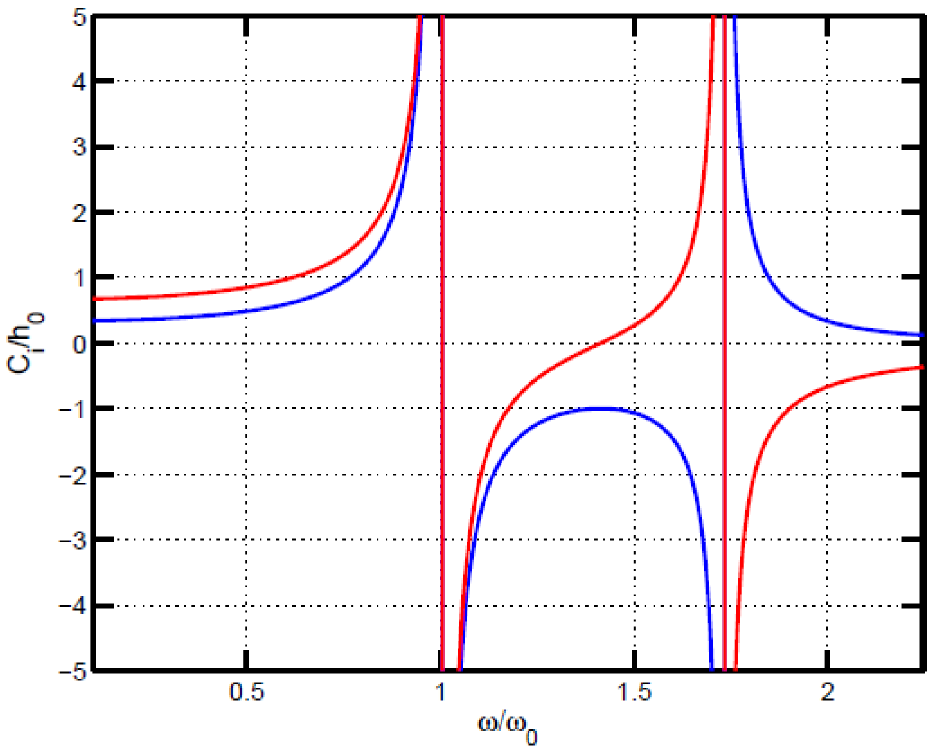
$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} (2\,\omega_0^2 - \omega^2) & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2\, h_0 \end{vmatrix}}{(\omega_0^2 - \omega^2)\,(3\,\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0^2\, h_0\,(2\,\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\,(3\,\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{23}$$

عند ω=0، $C_1 = \frac{1}{3} h_0$ و $C_2 = \frac{2}{3} h_0$.

ملاحظة: عند $\omega = \sqrt{2}\omega_o$، $C_1 = -h_0$ و $C_2 = 0$. الجسم الثاني يكون ساكناً، بينما يهتز الجسم الأول بسعة h_0 و 180 درجة خارج الطور مع المحرك. ذلك غريب نوعاً ما، أليس كذلك؟ تمّ شرح هذا السلوك الغريب بثلاثة طرق مختلفة في المحاضرات.

ث- (5 درجات) ارسم بيانياً هذه السعات كدالة بالنسبة لـ ω. ارسم السعة كقيمة موجبة عندما تكون داخل الطور مع المحرك، وسالبة عندما تكون خارج الطور مع المحرك. إمّا يجب أن ترسم مخططين مختلفين أو يجب أن تشير بوضوح لمنحنيات الكتلة الأولى والثانية على الشكل. يجب أن توضح المخططات قيم السعات من أجل $\omega=0$.

C_1 رُسم باللون الأزرق، و C_2 هو المنحني الأحمر في الشكل:



السؤال 4 (25 درجة): قفزة الطور

مذبذب توافقي ذو تخامد ضعيف (ثابت التخامد له $\gamma \ll \omega_0$) كتلته m، ويُحرك بقوة خارجية مطبّقة $F(t)$ (يمكنك افتراض وجود كتلة على النابض مع قوة خارجية $F(t)$ مطبقة على الكتلة). تردد التحريك ω مطابق لتردد الرنين ω_0 للمذبذب.

حل حالة الاستقرار:

أ- (5 درجات) ما هي قيمة الإزاحة $x(t)$ للمذبذب المُحرّك في حالة الاستقرار من أجل $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ ؟

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta)$$

$$x_0 = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2]^{1/2}} \qquad tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{24}$$

هنا $\omega = \omega_0 \Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$ و $\delta = \frac{\pi}{2}$.

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \sin \omega_0 t = x_0 \sin \omega_0 t \tag{25}$$

ب- (10 درجات) إذا كانت القوة الخارجية $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$، ماذا تكون x(t) في حالة الاستقرار؟

$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$ ، كل الحالات الأخرى هي نفسها، بالتالي:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{-F_0}{m\omega_0\gamma} \cos \omega_0 t = -x_0 \cos \omega_0 t \tag{26}$$

ت- (10 درجات) افترض الآن أن القوة الخارجية هي:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \cos(\omega_0 t) & (t \leq 0) \\ F_0 \sin(\omega_0 t) & (t > 0) \end{cases}$$

ما هي قيمة x(t) من أجل t>0؟

يجب أن تفترض أنه من أجل $t \leq 0$، يهتز النظام وفق حل حالته المستقرة من أجل القوة الخارجية $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$.

تلميح: قيم x والسرعة الاتجاهية عند اللحظة t=0 تنتج من حل حالة الاستقرار في الجزء (أ). من أجل t>0 سيكون هناك حالة استقرار جديدة، بالإضافة للمرحلة العابرة/الزائلة.

من أجل t>0، الحل العام هو الحل العابر + حل حالة الاستقرار $\omega=\omega_0$.

$$x(t)=\frac{-F_0}{m\omega_0\gamma}\cos\omega_0 t+Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t+\alpha)\qquad \omega'^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}\qquad (27)$$

الحد الأول هو حل حالة الاستقرار والحد الثاني هو الجزء العابر.

شرط ابتدائي: x(t=0) ينتج عن حل حالة الاستقرار عند t=0، المعادلة رقم 25. حيث حل حالة الاستقرار هو: $x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0\gamma}\sin\omega_0 t=x_0\sin\omega_0 t\Rightarrow x(t=0)=0$. هام!

من علاقة الحل العام (المعادلة 27):

$$x(t=0)=0\Rightarrow -x_0+A\cos\alpha=0\Rightarrow x_0=A\cos\alpha\qquad (28)$$

$\dot{x}(t=0)$ أيضاً ينتج عن حل حالة الاستقرار المعادلة رقم 25، عند t=0.

$$\dot{x}=x_0\omega_0\cos\omega_0 t\Rightarrow \dot{x}(t=0)=x_0\omega_0\qquad (29)$$

الاشتقاق الزمني للحل العام (المعادلة 27):

$$\dot{x}=\omega_0 x_0\sin\omega_0 t-\frac{\gamma}{2}Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega' t+\alpha)-Ae^{-\gamma t/2}\omega'\sin(\omega' t+\alpha)$$

بمطابقة الشرط الابتدائي $\dot{x}(t=0)=x_0\omega_0$، نحصل على:

$$\dot{x}(x=0)=x_0\omega_0=\frac{-\gamma}{2}A\cos\alpha-A\omega'\sin\alpha\qquad (30)$$

لاحظ أنه لدينا من المعادلة 28 : $A=\frac{x_0}{\cos\alpha}$، ولذلك:

$$\omega_0=-\frac{\gamma}{2}-\omega'\tan\alpha\qquad (31)$$

و

$$\tan\alpha = \frac{-(\omega_0 + \frac{\gamma}{2})}{\omega'} \tag{32}$$

بما أنّ $\omega_0 \approx \omega', \omega_0 \ll \gamma$، بالتالي $\tan\alpha \approx -1, \alpha \approx 45°$.

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma\cos\alpha} \approx \frac{\sqrt{2}F_0}{m\omega_0\gamma} \tag{33}$$

كحل بديل، عوضاً عن المعادلة رقم 27، كان بإمكاننا القول:

$$x(t) = -x_0\cos\omega_0 t + Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\omega' t + Be^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega' t \tag{34}$$

$x(t=0) = 0 \Rightarrow -x_0 + B = 0 \Rightarrow B = x_0.$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \omega_0 x_0\sin\omega_0 t - A\frac{\gamma}{2}e^{\frac{-\gamma}{2}t}\sin\omega' t + A\omega' e^{\frac{-\gamma}{2}t}\cos\omega' t \\ &\quad - B\frac{\gamma}{2}e^{\frac{-\gamma}{2}t}\cos\omega' t - B\omega' e^{\frac{-\gamma}{2}t}\sin\omega' t\end{aligned} \tag{35}$$

$\dot{x}(t=0) = x_0\omega_0 = A\omega' - x_0\frac{\gamma}{2} \Rightarrow A = x_0(\omega_0 + \frac{\gamma}{2})/\omega'.$

بما أنّ $\omega_0 \ll \gamma$، $\omega_0 \approx \omega'$ بالتالي $x_0 \approx A$، $B = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \approx A$.