الواجب المنزلي 06

قراءات مفيدة قبل حل الواجب

كتاب "فرنش": الصفحات 230-234، كتاب "باكفي & باريت": الصفحات 123-125، 189-213 (مراجعة معادلات "ماكسويل")، 213-250، 366-373

ملاحظة: ذكر "فرنش" في الصفحة 231 أنّ الأمواج ذات التردد المرتفع على السلك ترتحل بسرعة أقل من الأمواج ذات الترددات المنخفض، وهذا صحيح فقط من أجل الأسلاك الطوقيّة (أسلاك الخرز) وليس الأسلاك المستمرة (مثل أوتار البيانو). بسبب الصلابة في الأسلاك\الأوتار، على العكس من ذلك، ترتحل الأمواج ذات الترددات الأعلى بسرعة انتشار أكبر. ذكر "باكفي وباريت" علاقة التشتت الصحيحة في (معادلة 2-16). على أي حال، ذكرهم أنّ بعد a هو الطول غير صحيح (ماعدا أنّ a^2 في المعادلة 2-16، غالباً تدعى α كما سأفعل في المحاضرات).

قبل البدء بحل الواجب المنزلي، اقرأ هذا النص الممتع من كتاب:

.Crawford, Berkeley physics course -Waves

أمواج سطحية على الماء

عند التوازن، سطح جسم الماء مسطح وأفقي. عند تشكّل الموجة، هناك نوعان من قوى الاستعادة والتي تحاول تسطيح (جعلها مسطحة أكثر) قمم الموجة وإعادة وضع التوازن. الأولى هي الجاذبية، والثانية هي قوة شد السطح.

من أجل الأطوال الموجية الأكبر من بضع سنتيمترات، تسيطر قوة الجاذبية، بينما تسيطر قوة شد السطح في الأطوال الموجية من رتبة الميلي مترات.

بسبب عدم قابلية الانضغاط الكبيرة في الماء، الفائض من الماء الذي يظهر في قمة الموجة يجب أن يتدفق في مناطق الحوض المجاورة. قطرات الماء بشكل مفرد في الموجة المائية تخضع إلى حركة مركبة من حركة طولية (ذهاباً وإياباً) وحركة عرضية (أعلى وأدنى). إذا كان الطول الموجي صغيراً مقارنةً بعمق الماء عند التوازن، سيكون لدينا أمواج مائية عميقة. وبالتالي ستتحرك قطيرات الماء في الموجة المرتحلة بشكل دائري. البطة العائمة أو قطيرات الماء عند السطح تخضع لحركة دائرية منتظمة بنصف قطر

يساوي سعة الموجة التوافقية ودور يساوي دور الموجة. في قمة الموجة المرتحلة، ستكون السرعة الاتجاهية للأمام للبطة أو قطرات الماء أعظمية. في القاع، سيكون لديها سرعة اتجاهية تراجعية أعظمية.

قطيرات الماء تحت السطح ترتحل وفق دوائر صغيرة، حيث يتناقص نصف القطر بشكل أسّي مع العمق. الحركة صغيرة جداً، بضعة أطوال موجية تحت السطح.

تعطى علاقة التشتت للأمواج المائية العميقة بشكل تقريبي وفق العلاقة:

$$\omega^2 = gk + \frac{S}{\rho}k^3 \qquad (33)$$

حيث $\rho \approx 1.0\,\mathrm{gm/cm^3}$ و قوة الشد على السطح $S \approx 72\,\mathrm{dyne/cm}$ من أجل الماء، $g = 980\,\mathrm{cm/sec^2}$.

سنجعلك ترى أنه عندما يكون $(S/\rho)k^2$ = g، ستساهم الجاذبية وقوة الشد على السطح بشكل متساوي بقوة الإعادة في واحدة الإزاحة \ واحدة الكتلة (أيω^2). وبالتالي ستكون سرعات الطور والزمرة متساويتان. يمكنك رؤية ذلك يحدث عند الطول الموجي سم $\lambda = 1.70\ \mathrm{cm}$. ستكون كل من سرعة الطور والزمرة تساوي 23 سم\ثانية. من أجل الأطوال الموجية الأقل بكثير من 1.7 سم، تسيطر قوة شد السطح وبالتالي تكون سرعة الزمرة 1.5 من سرعة الطور. من أجل الأطوال الموجية الأكبر بكثير من 1.7 سم، ستكون سرعة الزمرة نصف سرعة الطور.

يحتوي الجدول 6-1 على وسطاء (بارامترات) الموجة من أجل الأطوال الموجية التي تتراوح من 1 ميلي متر (كالأمواج التي يمكن إثارتها بشوكة رنانة في كوب ماء) إلى 46 متر (أمواج محيط طويلة جداً).

Table 6.1 Deep-water waves

λ (cm)	ν (cps)	v_ϕ (cm/sec)	v_g (cm/sec)	v_g/v_ϕ
0.10	675.0	67.5	101.4	1.50
0.25	172.0	43.0	63.7	1.48
0.50	62.5	31.2	44.4	1.42
1.0	24.7	24.7	30.7	1.24
1.7	13.6	23.1	23.1	1.00
2.0	11.6	23.2	21.4	0.92
4.0	6.80	27.2	17.8	0.65
8.0	4.52	36.2	19.6	0.54
16.0	3.14	50.3	25.8	0.51
32.0	2.22	71.0	35.8	0.50
100.0	1.25	125.0	62.5	0.50
200.0	0.884	177.0	88.5	0.50
400.0	0.625	250.0	125.0	0.50
800.0	0.442	354.0	177.0	0.50
1600.0	0.313	500.0	250.0	0.50
3200.0	0.221	708.0	354.0	0.50
6400.0	0.156	1000.0	500.0	0.50

تطبيق

سنطرح هنا مثالاً لنستخدم الجدول 6-1، لنفترض أنك في نزهة على الشاطئ، البعض تساءل حول الطول الموجي للأمواج في المحيط المفتوح (20 أو 30 ميل من الساحل). قلت لهم انتظروا دقيقة لأخبركم بمقدار الطول الموجي. استخدمت ساعتك لحساب عدد الأمواج في الدقيقة (موجة كل خمس ثواني $\nu = 0.2$ cps). الطقس كان ثابتاً لعدة أيام، ولذلك يمكنك أن تفترض أن الأمواج في حالة الاستقرار (ما عدا الرياح المحلية التي لا تؤثر على أمواج المحيط الكبير). وبالتالي يكون التردد في عرض البحر 0.2 cps، وكذلك على الشاطئ. (بالطبع الطول الموجي مختلف، لأن الأمواج التي تتكّسر على الشاطئ ليست أمواجاً مائية عميقة. الطول الموجي يعتمد على عمق الماء بمحاذاة الشاطئ. التردد المُحرك لحالة الاستقرار ليس كذلك)

بحسب الجدول، الطول الموجي للأمواج في المحيط المفتوح يجب أن يكون حوالي 40 متر.

ما هي المسافة التي قطعتها قمم الموجة (التي تتكسر الآن على الشاطئ) آخر ساعة؟

إذا كانت الموجة معظم الوقت ترتحل في ماء عميق، بالتالي وبحسب الجدول سرعة الطور ستكون حوالي 8 متر\ثانية، حوالي 29000 متر\ساعة. وبالتالي الأمواج ارتحلت حوالي 30 كم (20 ميل) في آخر ساعة. وبما أنّ الطقس كان ثابتاً لعدة ساعات يجب أن تشعر بثقة في أن تقديرك للطول الموجي في المحيط المفتوح صحيح.

إذا لم تكن على الشاطئ، ولكن كنت تستخدم جهاز قياس الزلازل عند 20 أو 30 ميل من الشاطئ، يمكنك الإجابة على نفس السؤال.

السؤال 6-1: سرعة الطور والزمرة في البانيو (حمام السباحة)

تعطى علاقة التشتت من أجل الأمواج المائية العميقة بشكل تقريبي بـ:

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3$$

حيث $\omega = 2\pi/\lambda$.

أ- أثبت أنه من أجل الطول الموجي الأصغر بكثير من 1.7 سم، سرعة الزمرة تساوي 1.5 من سرعة الطور (استخدم المعادلة 33).

ب- أثبت أنه من أجل الطول الموجي الأكبر بكثير من 1.7 سم، سرعة الزمرة تساوي نصف سرعة الطور.

تجربة منزلية (اختياري)

حزم موجة مائية. الطريقة الأفضل لفهم الفرق بين سرعة الطور وسرعة الزمرة هي صنع حزم موجة مائية. لصنع حزم موجة دائرية موسّعة طولها الموجي 3 أو 4 سم أو أطول، ارمي حجراً كبيراً في بركة ماء أو حوض سباحة.

لصنع أمواج مستقيمة مع أطول موجية عدّة سنتيمترات، ضع عصا بحيث تطفوا في حوض الاستحمام أو مقلاة كبيرة من الماء.

ادفع العصا بشكل خفيف شاقولياً مرتين بيدك. بعد عدّة مرات، يجب أن تلاحظ أنه من أجل هذه الحل، ستكون سرعة الطور أكبر من سرعة الزمرة. (انظر الجدول 6-1) سترى أمواجاً صغيرةً تنشأ من

الصفر عند النهاية الخلفية للحزمة، ترتحل عبر الحزمة وتختفي عند المقدمة (يجب أن تقوم بذلك عدة مرات لملاحظة ذلك، أنّ الأمواج ترتحل بسرعة). هناك طريقة جيدة أخرى وذلك بوضع لوح في نهاية حوض الاستحمام والنقر عليه.

لصنع أمواج بطول موجي من رتبة الميلي متر(أمواج توتر سطحية)، استخدم قطّارة عين مملوءة بالماء. أسقط قطرة ماء من القطارة على مقلاة أو حوض استحمام. أولاً دع قطرة الماء تسقط من ارتفاع عدّة ميلي مترات فقط. هذا سيجعل الأطوال الموجية عدة ميلي مترات. لترى أن هذه الأمواج حقاً نتيجة قوة الشد على السطح، أضف قليلاً من الصابون إلى الماء وأعد التجربة. يجب أن تلاحظ نقصان سرعة الزمرة عند إضافة الصابون.

السؤال 6-2: أمواج مائية قليلة العمق (تجربة منزلية)

اصنع أمواجاً مائية قليلة العمق بحيث تكون سرعة الطور $v = \sqrt{gh}$. خذ مقلاة مربعة بطول قدم أو قدمين. املأها بالماء بعمق حوالي ½ أو 1 سم. ادفع المقلاة دفعة صغيرة (أو ارفع أحد الأطراف واتركه فجأةً). ستصنع حزماً لموجتين مرتحلتين، واحدة عند النهاية القريبة والأخرى عند النهاية البعيدة، ترتحلان في اتجاهات متعاكسة.

التجربة أنجزت بواسطة "آيغور سيلفر.

أ- قمت بقياس السرعة الاتجاهية وذلك بحساب الزمن لإحدى الأمواج من أجل عدّة أطول للمقلاة بحسب ما تستطيع (حوالي 4). اكتب تقريراً بالنتائج.

ب- ما مدى توافق نتيجتك مع $v = \sqrt{gh}$.

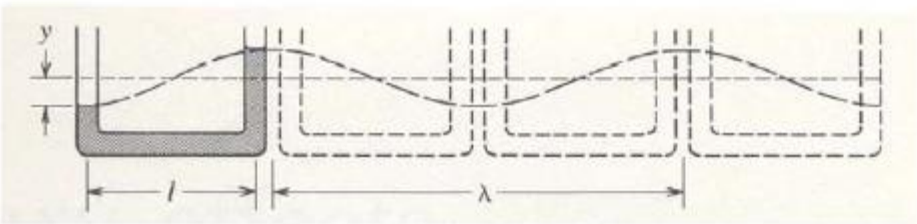
عند زيادة عمق الماء، ستصل إلى نقطة ستتغير عندها الأمواج إلى أمواج مائية عميقة.

في المسألة 6-3، ستستنتج علاقة التشتت (بشكل مبسط إلى حد ما) للأمواج المائية العميقة. سنفترض هنا أنّ $\lambda \gg 1$ سم وبالتالي يمكن إهمال تأثير قوة شد السطح (توتر السطح).

تأكد من مقارنة نتائجك بالمعادلة رقم 33 في الأعلى.

السؤال 6-3: (فرنش 7-20) – لماذا الأمواج المائية العميقة تشتتية؟

لدينا أنبوب على شكل (U) بمقطع عرضي منتظم وذراعين شاقوليين. لنفترض الطول الكلي لعمود السائل هو l . لنتخيل أنّ السائل يهتز ذهاباً وإياباً، وبالتالي عند أي لحظة، سيصعد ويهبط مستوى الماء في الجانب $\pm y$ بالنسبة لوضع التوازن، وستكون سرعة كل السائل dy/dt.



أ- اكتب علاقة الطاقة الكامنة + الطاقة الحركية للسائل، وأثبت أنّ دور الاهتزاز يساوي $\pi\sqrt{2l/g}$.

الطاقة الكامنة للسائل تساوي:

$$U = mgh = (\rho Ay)gy = \rho Agy^2.$$

والطاقة الحركية تساوي

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(\rho Al)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

يمكننا استنتاج معادلة الحركة من مصونية الطاقة:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= 0\\ &= (2A\rho gy + \rho Al\ddot{y})\dot{y}\\ \Rightarrow \ddot{y} + \frac{2g}{l}y &= 0.\end{aligned}$$

هذا اهتزاز توافقي بسيط. وبالتالي دور الاهتزازات يساوي $T = \pi\sqrt{2l/g}$.

ب- تخيل أنّ عدة أنابيب متتالية يمكن أن تستخدم لتحديد قمم وقيعان موجة مائية (انظر الشكل). بأخذ نتيجة الجزء (a) والشرط $\lambda \approx 2l$. استنتج أن سرعة الأمواج على الماء تقريباً $(g\lambda)^{1/2}/\pi$. (افترض أنّ جزءً صغيراً فقط من السائل في الذراعين الشاقوليتين للأنبوب U.)

ت- استخدم النتيجة $v = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$ لحساب سرعة الأمواج التي طولها الموجي 500 متر في المحيط.

السؤال 6-4: الطاقة في الأمواج

الطاقة E_λ المخزنة في طول موجي واحد (λ) لسلك مهتز (موجة مستقرة) تساوي:

$$E_\lambda = \frac{TA^2\pi^2}{\lambda}$$

T هي قوة الشد في السلك، و A هي السعة لبطون الموجة.

أ- برهن أن هذه النتيجة مكافئة للمعادلة 7-38 في كتاب "فرنش" (الصفحة 242).

إذا قربنا -للتبسيط- موجة جيبية إلى مثلثية (انظر الأشكال) ، عندها يمكننا بسهولة حساب كمية الطاقة اللازمة لإعطاء السلك هذا الشكل المثلثي.

ستلتقط السلك (طوله L) من المنتصف عند النقطة M (انظر الشكل العلوي)، واسحب هذه النقطة للأعلى مسافة A. افترض عند فعل ذلك أن قوة الشد في السلك T لا تتغير (A << L).

ب- احسب كمية العمل الذي يجب أن تقوم به.

الآن قسّم نفس السلك إلى n قطعة متساوية، طول كل منها L/n، كما هو موضح في الشكل السفلي. اسحب النقاط في الوسط لكل القطع مسافة A_n.

ت- احسب كمية العمل الذي يجب أن تقوم به للقيام بذلك (احسب العمل من أجل قطعة واحدة فقط واضرب الناتج بـ n).

هذا الحساب البسيط سيعطيك كمية الطاقة المخزنة في السلك من أجل القيم المعلومة لقوة الشد T والطول L وعدد القطع n والسعة A_n. إذا أخذت شكل منحني جيبي للسلك بدلاً من الشكل المثلثي، الطاقة المخزنة ستكون أكبر.

ث- وفق أي معامل؟

لاحظ أنّ الطاقة في الوضع n متناسبة مع n^2 (وبالتالي متناسبة مع ω_n^2) بالطبع إنها أيضاً متناسبة مع تربيع السعة (A_n^2).

السؤال 6-5: الطاقة في الأمواج المرتحلة على السلك

سلك بقوة شد T و كتلة في واحدة الطول μ، تنتشر عليه أمواج بسعة A.

أ- حاول تعليل أن الطاقة الحركية والكامنة في الأمواج المرتحلة متساوية، وذلك بالاعتماد على فكرة أن الموجة المستقرة هي نتيجة موجتين مرتحلتين.

ب- ما هي قيمة الطاقة الحركية والكامنة في واحدة الطول للسلك؟

السؤال 6-6: (باكفي & باريت 3-3) – أمواج مستوية كهرومغناطيسية

يعطى الحقل المغناطيسي لموجة مستوية منتظمة بالعلاقة التالية:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_{oy} f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)\hat{y}$$

حيث B_0 هو ثابت عددي، وهي أي دالة بالنسبة لمتغير الدالة المطلق. المتجهات $\vec{k}$ و $\vec{r}$ تساوي $k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ و $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ على التوالي.

أ- أعطي كل الشروط المفروضة على $\vec{E}(\vec{r},t)$ و $\vec{k}$ من معادلات "ماكسويل" ومعادلات الموجة.

ب- إذا كانت kz=0، أعطي تعبيراً لـ $\vec{E}(\vec{r},t)$ بشكل مشابه لـ $\vec{B}(\vec{r},t)$.