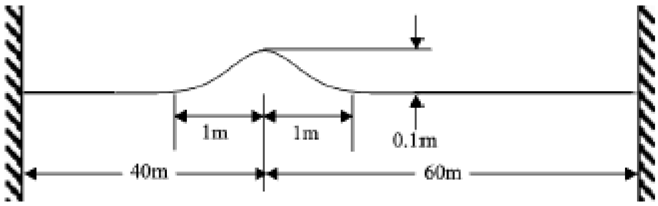
حل الواجب المنزلي 04

السؤال 4-1: نبضة مرتحلة

قم بحل المسألة 7- 12 من كتاب "فرنش"

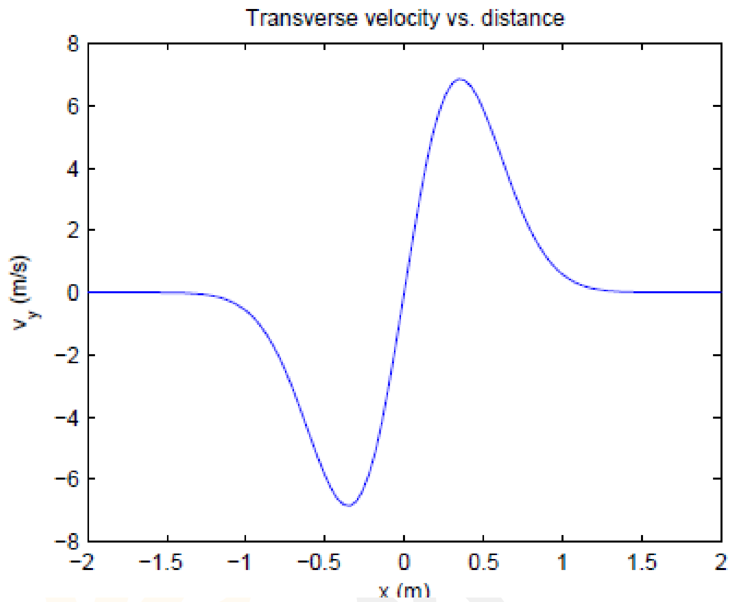
A. P. *Vibrations and Waves*. New York, N.Y.: W. W. Norton and Company, January 1, 1971. ISBN: 0393099369

يوضح الشكل نبضة على سلك طوله 100 متر، مثبّت من النهايتين، ترتحل النبضة نحو اليمين بدون أي تغيّر في الشكل بسرعة 40 متر\ثانية.



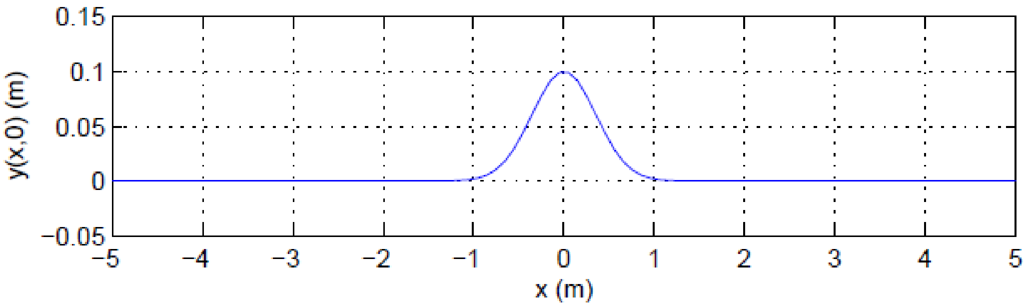
أ- ارسم مخططاً واضحاً يبين تغيّر السرعة الاتجاهية العرضية مع المسافة على طول السلك عندما تكون النبضة في موقع معين.

بما أنّ النبضة ترتحل نحو اليمين، بالتالي يكون جزء السلك على يمين الذروة مرتفعاً للأعلى، بينما يكون جزء السلك على يسار الذروة هابط للأسفل. السرعة الاتجاهية العرضية للذروة تكون 0 ولكن تسارعها يكون أعظمياً (انظر الشكل في الأسفل).



ب- ما هي القيمة الأعظمية للسرعة الاتجاهية العرضية للسلك (تقريباً)؟

يكون شكل النبضة كالتالي:



يمكننا نمذجة النبضة باستخدام دالة "غاوس".

$$y(\eta) = Ae^{-\alpha\eta^2}$$

حيث $\eta = x - vt$، $A = 0.1$ متر و $\alpha = 4$ متر$^{-2}$. المخطط في الأعلى لشكل النبضة يمثل هذه الدالة. وبالتالي تكون السرعة الاتجاهية العرضية:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= -2A\alpha\eta e^{-\alpha\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= 2A\alpha v\eta e^{-\alpha\eta^2} \end{aligned}$$

يمكننا إيجاد السرعة الاتجاهية العرضية العظمى عند t=0، وذلك من خلال اشتراط:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= 0 \\ 2A\alpha v^2 e^{-\alpha\eta^2}\left(2\alpha x_{\max}^2 - 1\right) &= 0 \\ \Rightarrow 2\alpha x_{\max}^2 - 1 &= 0 \\ x_{\max} &= \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}. \end{aligned}$$

وبالتالي تكون السرعة الاتجاهية العرضية العظمى عند t=0:

$$\begin{aligned} v_y|_{\max} &= \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=x_{\max}} \\ &= 2Av\sqrt{\frac{\alpha}{2}}e^{-1/2} \\ &\approx 6.86 \text{ متر\ثانية} \end{aligned}$$

ت- إذا كانت الكتلة الكلية للسلك 2 كغ، ما هي قوة الشد T فيه؟

كثافة كتلة السلك هي $\mu = 1/50$ كغ\م. وبالتالي قوة شد السلك

$$T = \mu v^2 \approx 32 \text{ نيوتن}$$

ث- اكتب المعادلة من أجل y(x,t) التي توصّف رقمياً الأمواج الجيبية، حيث طول الموجة 5 م، والسعة 0.2 متر، وترتحل في الاتجاه السالب للمحور x على سلك طويل جداً مصنوع من نفس المادة ومطبق عليه نفس قوة الشد كما في الأعلى.

يمكن توصيف أي موجة مرتحلة في الاتجاه السالب لـ x وبسرعة v كالتالي:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= f(\eta) \\ &= f(kx+\omega t), \end{aligned}$$

حيث $f(\eta)$ هو شكل الموجة، k هو العدد الموجي و ω هي التردد الزاوي. من أجل الأمواج الجيبية:

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi),$$

حيث A هي سعة الموجة و Φ هي طور المنحني الجيبي. بالإضافة إلى ذلك، طول الموجة يساوي 5 متر، وبالتالي $k = 2\pi/\lambda = 0.4\pi$ متر$^{-1}$. بما أنّ هذه الموجة ترتحل على السلك، فيجب أن تخضع للعلاقة التالية $\omega = kv = 16\pi$ ثانية$^{-1}$. ولذلك تكون المعادلة التي توصّف الموجة:

$$y(x,t) = (0.2\ \mathrm{m})\sin\left(\left(0.4\pi\ \mathrm{m}^{-1}\right)x + \left(16\pi\ \mathrm{s}^{-1}\right)t + \phi\right),$$

حيث Φ مجهول، طالما أنّ طور الموجة غير محدّد.

السؤال 4-2: نبضة مرتحلة

قم بحل المسألة 7 - 13 من كتاب "فرنش"

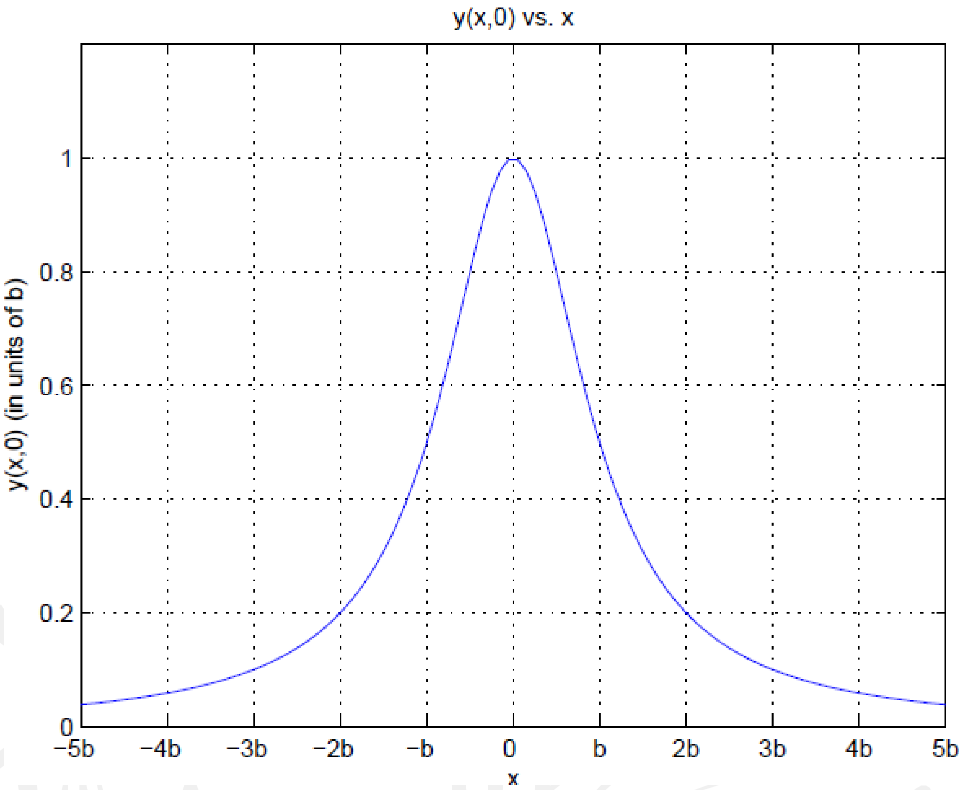
A. P. *Vibrations and Waves.* New York, N.Y.: W. W. Norton and Company, January 1, 1971. ISBN: 0393099369

تُوصف نبضة مرتحلة على طول سلك مشدود بالمعادلة التالية:

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$$

أ- ارسم رسماً بيانياً لـ y مقابل x من أجل t=0.

يوضّح الشكل التالي منحني y(x,0)



ب- ما هي سرعة النبضة واتجاه ارتحالها؟

تذكّر أنه يمكن التعبير عن أي موجة أو نبضة ترتحل بالاتجاه الموجب لـ x كـ $y(\omega t - kx)$ ، من أجل $k \geq 0$ وحيث سرعة الانتشار $v = \omega/k$. وبالتالي لتكن $z = \omega t - kx$ ونعبر عن y(x,t) كدالة بالنسبة لـ z كالتالي:

$$y(z) = \frac{b^3}{b^2 + z^2}.$$

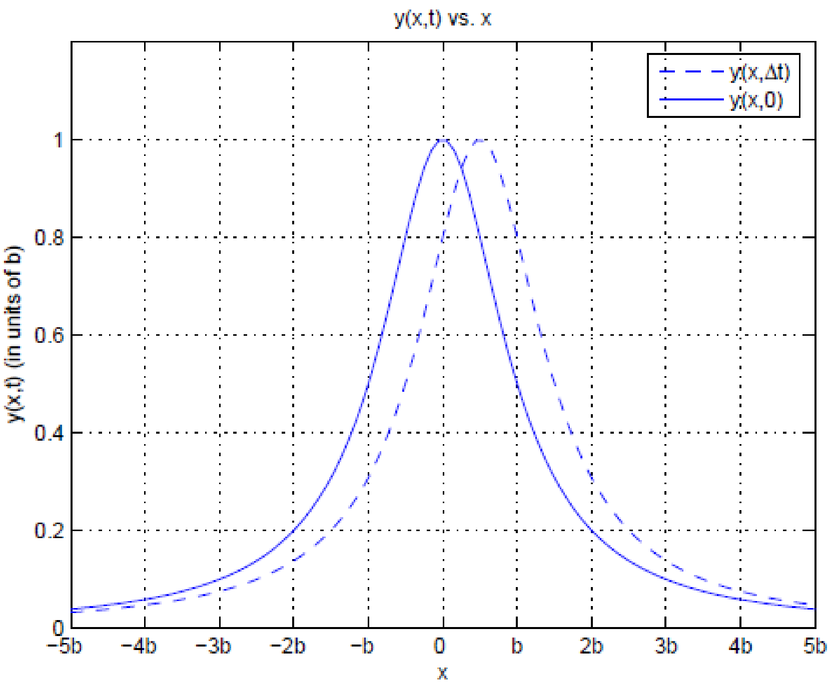
إذاً، $z = 2x - ut$. ولذلك من أجل القيم الموجبة لـ u، ترتحل النبضة في الاتجاه الموجب لـ x بسرعة $v = u/2$.

ت- تُعرّف السرعة الاتجاهية العرضية لنقطة معطاة من السلك كما يلي:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

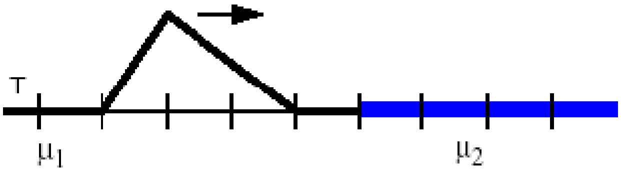
احسب v_y كدالة بالنسبة لـ x من أجل اللحظة t=0، وأظهر من خلال الرسم حركة النبضة خلال وقت قصير Δt.

$$\begin{aligned} v_y(t=0) &= \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{2b^3u(2x-ut)}{\left(b^2+(2x-ut)^2\right)^2}\right|_{t=0} \\ &= \frac{4b^3xu}{\left(\,b^2+4x^2\right)^2} \end{aligned}$$



السؤال 4-3: انعكاس نبضة عند حدّ (سطح).

سلكان، الكتلة في واحد الطول هي $\mu_1 = 0.1$ كغ\متر و $\mu_2 = 0.3$ كغ\متر على التوالي، متصلان بسلاسة. قوة الشد المطبقة عليهما $T = 20$ نيوتن. يوضح الشكل حركة موجة مرتحلة مثلثية الشكل نحو اليمين على طول السلك الأخف. تعبّر التدريجات في الشكل عن عرض النبضة.



أ- أوجد معاملات الانعكاس والنفاذية عند نقطة الاتصال (بما في ذلك الإشارات).

سرعة الانتشار في السلك الأول $v_1 = \sqrt{T/\mu_1} = 10\sqrt{2}\ \mathrm{m/s} \approx 14$ متر\ثانية وفي السلك الثاني $v_2 = \sqrt{T/\mu_2} = 10\sqrt{2/3}$ متر\ثانية ≈ 8 متر\ثانية، وبالتالي يكون معامل الانعكاس:

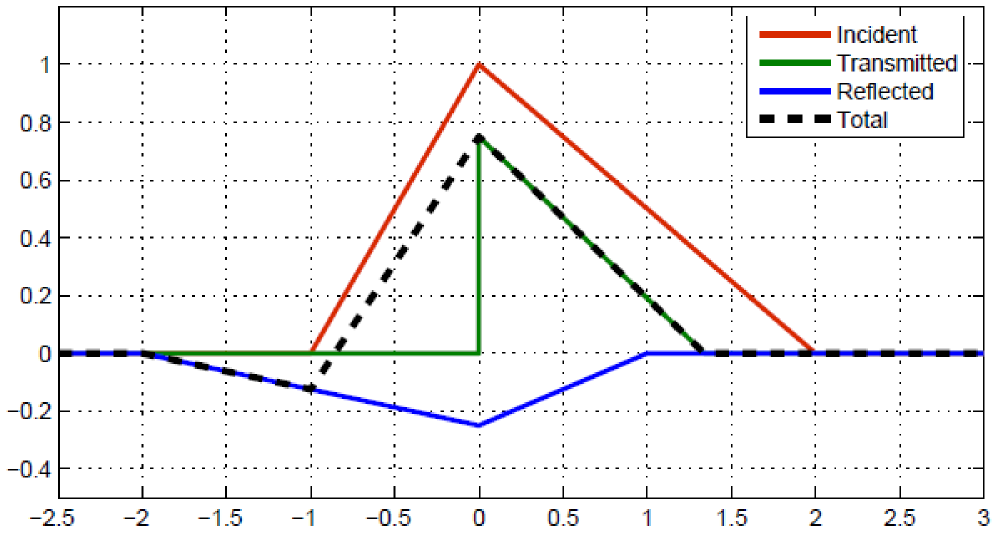
$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} + 3} \approx -\frac{1}{4},$$

ومعامل النفاذية:

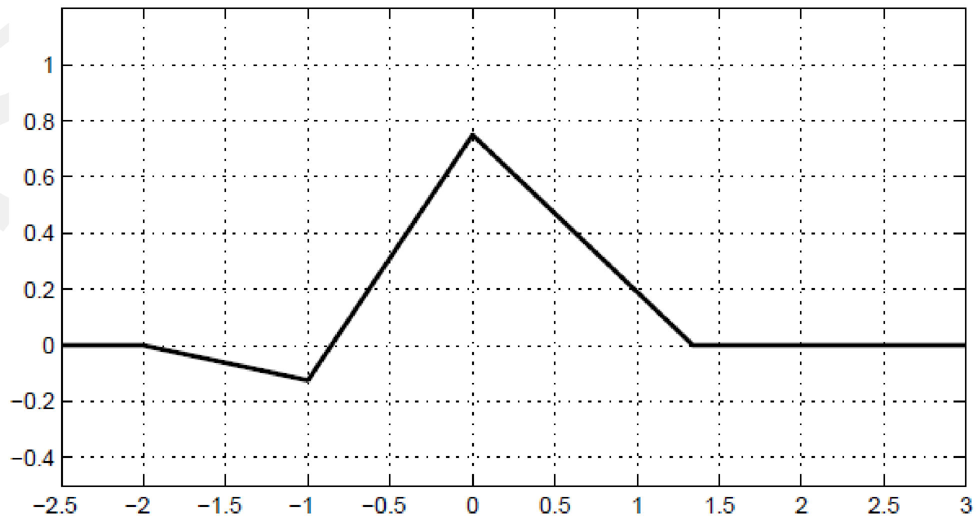
$$T = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3} \approx \frac{3}{4}.$$

ب- ارسم شكلاً دقيقاً للتشوه (التغيّر) الكلي للسلك عندما تصل ذروة النبضة الواردة تماماً إلى نقطة الاتصال، علّل كيف وصلت لإجابتك من خلال الشكل.

يوضح الشكل التالي الأمواج الواردة والمنعكسة والنافذة عندما تصل ذروة النبضة إلى نقطة الاتصال (x=0). لاحظ أن النبضة المنعكسة مقلوبة رأساً على عقب ومعكوسة من اليمن لليسار. أيضاً النبضة النافذة أضيق. انتبه أنه فقط الخط الأسود المتقطع ذو معنى فيزيائي. الخطوط الأخرى (الأحمر والأخضر والأزرق) هي فقط لأغراض توضيحية.

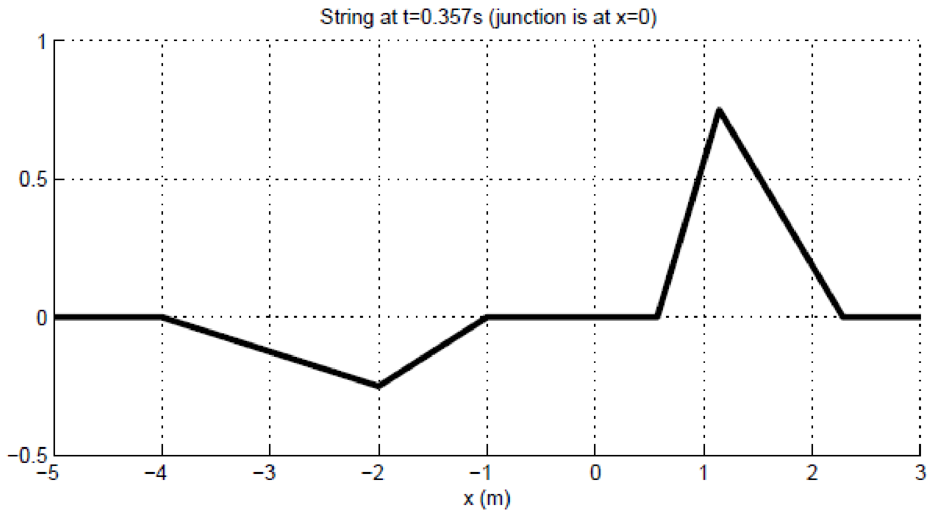


يوضّح الشكل في الصفحة التالية تشوه السلك عندما تكون الذروة عند x=0.



ت- ارسم شكلاً دقيقاً للتشوه الكلي للسلك عندما تبتعد كل من النبضة المنعكسة والنافذة عن نقطة الاتصال.

شكل السلك عند اللحظة $t = (5 \text{ متر})/v_1 = 0.357$ ثانية موضح في الشكل التالي:



ث- ما هو المعنى غير الفيزيائي لشكل هذه النبضة (كن كمياً)؟

النتوء الحاد للنبضة لا معنى له فيزيائياً لأنه يقود لطاقة كامنة غير نهائية للسلك. كثافة الطاقة الكامنة في السلك هي:

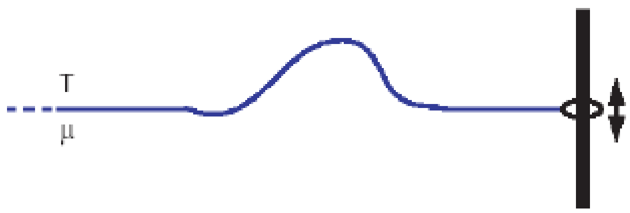
$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}T\frac{\partial y}{\partial x}$$

بما أنّ النبضة ليست منبسطة عند النتوء، سيكون الانحدار لا نهائياً. ولذلك ستكون الطاقة الكامنة للسلك لا نهائية.

عوضاً عن ذلك، يمكن مناقشة الأمر كالتالي: عند أي نقطة في السلك، القوى يجب أن تلغى لأنّ كل نقطة لها كتلة متناهية في الصغر. نحن نحتاج إلى قوى متلاشية عندما تكون الكتل متلاشية وبالتالي يبقى التسارع محدوداً. النتوء في السلك يسبب تسارعاً لا نهائياً طالما أن القوى عند تلك النقاط لا تلغى.

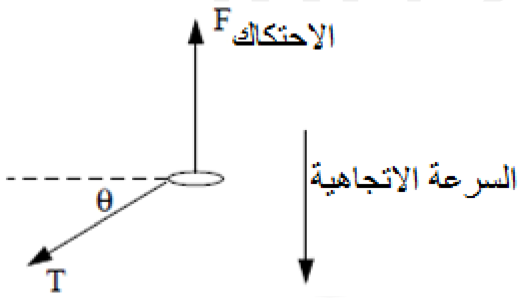
السؤال 4-4: شروط حديّة على سلك

سلك طويل جدّاً، كثافته الكتليّة μ وقوة الشدّ T، متصل بحلقة صغيرة مهملة الكتلة، تنزلق الحلقة على قضيب شاقولي (مدهون بالشحم). وتخضع لقوة شاقولية $F_y = -b\frac{\partial y}{\partial t}$ عند حركتها.



أ- قم بتطبيق قانون "نيوتن" على الحلقة لإيجاد الشرط الحدّي عند نهاية السلك. عبر عن نتائجك بدلالة المشتقاقات الجزئية لـ y(x,t) عند موضع القضيب.

يوضح الشكل التالي القوى المؤثرة على الحلقة:



وبتطبيق قانون "نيوتن" الثاني، نحصل على:

$$\Delta m\ddot{y} \;=\; -T\sin\theta + F_{\text{الاحتكاك}}$$

بافتراض أن الاهتزازات صغيرة

$$\Delta m\ddot{y} = -T\frac{\partial y}{\partial x} - b\frac{\partial y}{\partial t}$$

بما أنّ كتلة الحلقة مهملة

$$
\begin{aligned}
-T\frac{\partial y}{\partial x} - b\frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{b}{T}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{At} \ \text{عند الحلقة} \ \forall t
\end{aligned}
$$

ب- وضّح أن الشرط الحدّي متوافق مع نبضة واردة f(x-vt) ونبضة منعكسة g(x+vt). أوجد g بدلالة f.

لنأخذ تراكب موجة واردة وموجة منعكسة:

$$
y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{واردة، معلوم}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{منعكسة، معلوم}}
$$

سنستخدم الشرط الحدّي على الحلقة لحل g(x+vt). يكون الاشتقاق التتابعي:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= f'(x-vt) + g'(x+vt) \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= v\left(-f'(x-vt) + g'(x+vt)\right)
\end{aligned}
$$

إذا كانت الحلقة عند x=0، بالتالي:

$$
\begin{aligned}
f'(-vt) + g'(vt) &= \frac{bv}{T}\left(f'(-vt) - g'(+vt)\right) \\
g'(vt) &= \frac{bv/T - 1}{bv/T + 1} f'(-vt).
\end{aligned}
$$

لتكن $\eta = vt$ ولنكامل بالنسبة لـ η

$$
\begin{aligned}
\int g'(\eta)\, d\eta &= \int \frac{bv/T - 1}{bv/T + 1} f'(-\eta)\, d\eta \\
g(\eta) &= \frac{bv - T}{bv + T}(-1) f(-\eta) \\
g(\eta) &= \frac{T - bv}{T + bv} f(-\eta).
\end{aligned}
$$

لاحظ أن ثابت التكامل يجب أن يساوي 0 من أجل الحالات الحدّية المناقشة في الجزء التالي.

ت- وضح أنّ نتائجك صحيحة عند الحالات الحدّية 0 → b (يمكن للسلك الانزلاق بحريّة) و $b \to \infty$ (السلك مثبّت بإحكام).

من أجل b=0 تتصرف الحلقة وكأنها نهاية حرّة. نتيجتنا تعطي $g(\eta) = f(-\eta)$ وهي صحيحة طالما أن الموجة تنعكس بدون أن تكون مقلوبة.

من أجل $b \to \infty$، تعتبر الحلقة نهاية ثابتة. نتيجتنا تعطي $g(\eta) = -f(-\eta)$ وهي صحيحة طالما أن الموجة تنعكس بشكل مقلوب.

لاحظ أنه من أجل الحالة الخاصة عندما $b = T/v,\ g(\eta) = 0$. عندها لا يكون هناك موجة منعكسة. يعرف هذا باسم "الحمل المتطابق".

السؤال 4-5: شروط حدّية في أنبوب

توصّف اهتزازات الضغط في أنبوب مجوّف طوله L بمعادلة الموجة:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\kappa}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

حيث p هو الضغط المفرط (فوق 1 جو ضغط خارجي)، ρ_0 هي كثافة الغاز في الأنبوب، k معامل الحجم، و z الاتجاه الطولي على طول الأنبوب. لنفترض أن الحل بالصيغة التالية:

$$p(z,t) = [A\ coskz + B\ sinkz]cos\omega t$$

أوجد قيمة جميع المجاهيل (A و B و k و ω) عندما يكون الأنبوب مفتوحاً من الجانبين و $p(z = L/2, t = 0) = p_0$.

معادلة الموجة من أجل الضغط المفرط p(z,t) داخل أنبوب:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\kappa}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

الحل لهذه المعادلة هو:

$$p(z,t) = [A\ coskz + B\ sinkz]cos\omega t$$

بما أنّ الأنبوب مفتوح من الجانبين (تذكر أنّ p هو الضغط المفرط)

$$\begin{aligned} p(0,t) &= 0 \\ A\cos\omega t &= 0 \\ \Rightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} p(L,t) &= 0 \\ B\sin kz\cos\omega t &= 0 \\ \sin kz &= 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{n\pi}{L} \end{aligned}$$

حيث n = 1, 2, 3…

يمكننا الحصول على علاقة التشتت من خلال إقحام p(z,t) إلى معادلة الموجة للنظام. وبالتالي تكون الاشتقاقات ذات الصلة:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial z} &= kB\cos kz\cos\omega t,\\
\frac{\partial p}{\partial t} &= -\omega B\sin kz\sin\omega t,\\
\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} &= -k^2 B\sin kz\cos\omega t,\\
\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\omega^2 B\sin kz\cos\omega t.
\end{aligned}
$$

عندها تختصر معادلة الموجة إلى:

$$
\begin{aligned}
-k^2 B\sin kz\cos\omega t &= -\omega^2 B\sin kz\cos\omega t\\
\Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}k\\
\omega_n &= n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}.
\end{aligned}
$$

أخيراً، الشرط الابتدائي يحدد k_n و B. الشرط الابتدائي هو:

$$
\begin{aligned}
p(L/2,0) &= p_0\\
B\sin k\frac{L}{2} &= p_0\\
B\sin\frac{n\pi}{2} &= p_0\\
\Rightarrow B &= \pm p_0
\end{aligned}
$$

حيث $n = 1, 3, 5, 7\ldots.$

إذاً، n يجب أن تكون رقماً صحيحاً فردياً، وإلّا B ستساوي 0، و p(z,t) = 0 وهو بالفعل حل تافه.

أخيراً، يكون العدد الموجي:

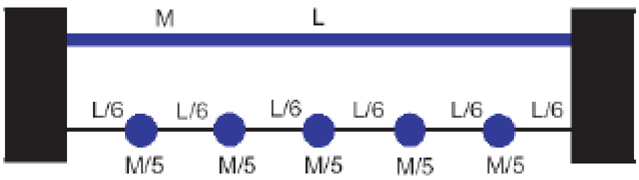
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$ حيث $n = 1, 3, 5, 7\ldots.$

و

$$B = +p_0 \quad \text{من أجل} \quad n = 1, 5, 9 \dots$$
$$B = -p_0 \quad \text{من أجل} \quad n = 3, 7, 11, \dots.$$

السؤال 4-6: مقارنة الأوضاع الطبيعية في الأنظمة المستمرة والمتقطعة

لدينا في الشكل التالي، سلك متجانس طوله L والكتلة الكليّة M وقوة الشد T. يتموضع على سلك آخر عديم الكتلة 5 كتل صغيرة، كل منها M/5 ويفصل فيما بينها مسافات متساوية، قوّة الشد على السلك T والطول الكلي للسلك L.



أ- استخدم الشروط الحدّية لاستنتاج تعبير عام لترددات الأوضاع الطبيعية لاهتزاز السلك. أوجد الترددات بدلالة n، T، L و M.

الحل الأكثر شمولية لموجة مستقرة في سلك هو:

$$y(x,t) = A\cos(kx + \phi_x)\cos(wt + \phi_t)$$

الشروط الحدية هي:

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0 \\ A\cos\phi_x &= 0 \\ \Rightarrow \phi_x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y(L,t) &= 0 \\ A\sin kL &= 0 \\ \Rightarrow kL &= n\pi. \end{aligned}$$

وبالتالي يكون الوضع الطبيعي رقم n للسلك:

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\omega_n t + \phi_t\right)$$

حيث

$$\begin{aligned}\omega_n &= n\omega_1 \\ &= \frac{n\pi v}{L} \\ &= \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \\ &= n\pi\sqrt{\frac{T}{ML}}.\end{aligned}$$

ب- اكتب الترددات لأدنى خمسة أوضاع طبيعية للاهتزازات العرضية للسلك.

الصيغة العامة لتردد الوضع n هي:

$$\begin{aligned}\nu_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{ML}}.\end{aligned}$$

وبالتالي تكون أصغر خمسة أوضاع طبيعية:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{T}{ML}} \equiv \nu_0, & \nu_2 &= \sqrt{\tfrac{T}{ML}} = 2\nu_0, \\ \nu_3 &= \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{T}{ML}} = 3\nu_0, & \nu_4 &= 2\sqrt{\tfrac{T}{ML}} = 4\nu_0, \\ \nu_5 &= \tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{T}{ML}} = 5\nu_0. & &\end{aligned}$$

ت- قارن القيم العددية لترددات هذا الوضع الطبيعي مع ترددات الوضع الطبيعي للكتل الخمسة الصغيرة على السلك عديم الكتلة.

تلميح: لا يجب عليك إيجاد الحل لترددات الكتل الصغيرة، يمكنك استخدام المعادلات من كتاب "فرنش" رقم 5-25 و 5-26.

من المعادلة رقم 5-25 في كتاب "فرنش":

$$\begin{aligned}\omega_n &= 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)\\ \Rightarrow \nu_n &= \frac{\omega_0}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right).\end{aligned}$$

التردد الأساسي هو:

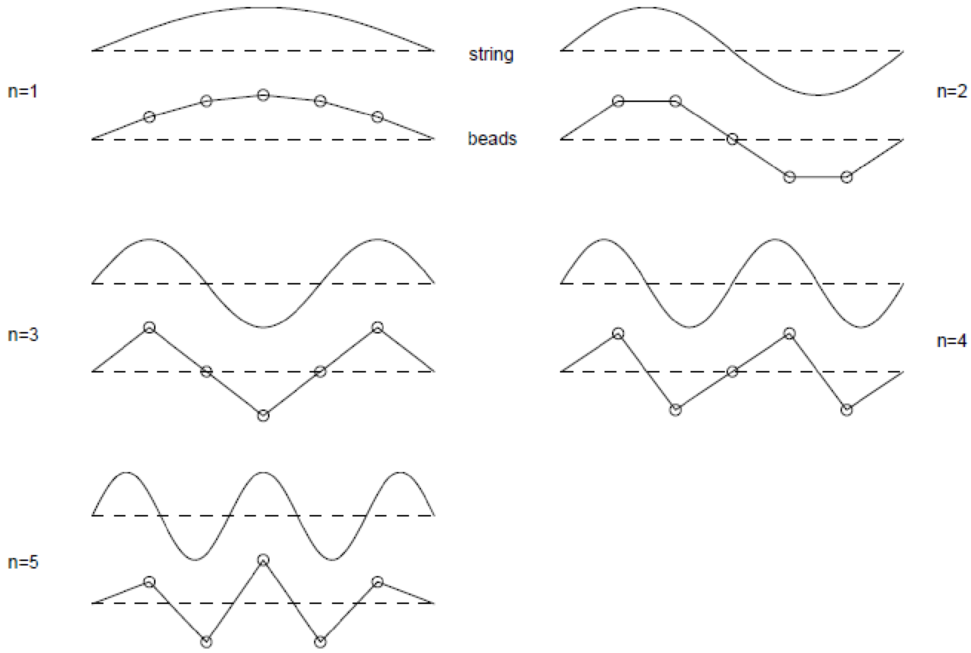
$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{T}{\frac{M}{5}\frac{L}{6}}}\\ &= \sqrt{\frac{30T}{ML}}\\ &= \sqrt{120}\nu_0.\end{aligned}$$

وبالتالي الترددات الخمسة الأولى (N = 5):

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{\sqrt{120}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}\nu_0\right) = 0.9\nu_0, & \nu_2 &= \frac{\sqrt{120}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\nu_0\right) = 1.7\nu_0,\\ \nu_3 &= \frac{\sqrt{120}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\nu_0\right) = 2.5\nu_0, & \nu_4 &= \frac{\sqrt{120}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\nu_0\right) = 3.0\nu_0,\\ \nu_5 &= \frac{\sqrt{120}}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\nu_0\right) = 3.5\nu_0.\end{aligned}$$

ث- ارسم الأوضاع الطبيعية الصغرى الخمسة التي وجدتها للسلك متجانس الكتلة، وارسم أيضاً الأوضاع الطبيعية الخمسة للسلك عديم الكتلة مع الكتل الخمسة الصغيرة.

الأشكال التالية تظهر الأوضاع الطبيعية الخمسة الأولى للسلك والكتل الصغيرة.



ج- في جملة أو جملتين، ناقش الفروق (إن وجدت) بين الأوضاع الطبيعية للنظامين هنا.

بما أنّ $N = 5$، بالتالي N ليست أكبر بكثير من 1، وهذا يعني أنّ ترددات الوضع الطبيعي والأشكال غير متطابقة.