حل الواجب المنزلي 05

قراءات مفيدة قبل حل الواجب

كتاب "فرنش": الصفحات 161-178، 189-196، كتاب "باكفي & باريت": الصفحات 165 – 178

<u>**لحل المسألة رقم 5-1 و 5-6 ستحتاج استخدام بيانو**</u>

السؤال 5-1: البيانو متوافر

لحل هذه المسألة تحتاج لبيانو، معظم الأبنية الطلابية تحتوي على بيانو واحد على الأقل، ويوجد العديد منه في المركز الطلابي. توجد صورة للمفاتيح في الأسفل والتي سنشير إليها خلال نص المسألة.

ليكن 256 هرتز تساوي وحدة تردد واحدة، $v=1$. وبالتالي التوافقيات لهذه النوتة ستكون $v = 2, 3, 4..$.

C الأوسط على البيانو هو C256 (إذا تم دوزان البيانو بتلك الطريقة). نسميه C_4، حيث الرقم السفلي المرتبط بالحرف يشير إلى الجواب. حيث يزداد بمقدار 1 عند كل جواب أعلى لـ C. وبالتالي التردد الأساسي لـ C_3 (ويسمى توافقي جزئي لـ C_4) يساوي 128 هرتز حيث $(v = 1/2)$. لتجنب الالتباس، سأشير دائماً للأساسي بالتوافقي الأول. وبالتالي التوافقي الأول لـ C_3 يساوي 128 هرتز. والتوافقي الثاني يساوي 256 هرتز.

لنفترض أن أوتار البيانو مثالية، وبالتالي ترددات الوضع لوتر معطى ستحتوي على سلسلة التوافقيات $v1, 2v1, 3v1..$. الأسماء والترددات لأول 16 توافقي للوتر C4 وأيضاً أول توافقيان جزئيان $(v= 1/3$ و $v = 1/2)$ ستكون كما يلي (وضعنا خطاً تحت C4 و الجوابات الخاصة بها):

الأسماء:	F_2	C_3	C_4	C_5	G_5	C_6	E_6	G_6	Bb_6	C_7	D_7	E_7	$F\#_7$	G_7	$G\#_7$	Bb_7	B_7	C_8
ν:	$\frac{1}{3}$	$\underline{\frac{1}{2}}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	3	$\underline{4}$	5	6	7	$\underline{8}$	9	10	11	12	13	14	15	$\underline{16}$

سنبدأ هذه التجربة بتحديد فيما إذا كان البيانو الذي تستخدمه مناسباً لحانة أو قاعة أوركسترا. اعزف النوتة وابدأ من C_3 وإلى الأعلى (واحد في كل مرة) واستمع للخفقان.

العديد من المفاتيح (ليس كلها) تُنشّط اثنان أو ثلاثة أوتار متجانسة بشكل متزامن. يحتوي بيانو "ستاينواي" الضخم على 216 وتر (88 مفتاح). إذا لم تكن الأوتار الثلاثة (أو الاثنان) والتي تركّب نوتة واحدة قد تم دوزنتها، ستسمع الخفقان.

لنفترض أنك نقرت C_5، وسمعت صوتاً أعظمياً بعد فترة 1 ثانية.

أ- ما هو الفرق في قوة الشد بين أوتار C_5؟ قوة الشد في كل وتر في البيانو حوالي 250 نيوتن.

التردد للوضع n للوتر يساوي $\nu_n = \omega_n/2\pi = n\sqrt{T}/2L\sqrt{\mu}$. التفاضل بالنسبة لـ T يعطي:

$$\begin{aligned}\frac{d\nu_n}{dT} &= \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{1}{T\mu}} \\ &= \left(\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)\frac{1}{2T} \\ &= \frac{1}{2T}\nu_n\end{aligned}$$

نعلم أن $\nu_{C_5} = 512$ هرتز , $n = 1,\ T = 250$ نيوتن و $d\nu = 0.5$ هرتز. وبالتالي

$dT = (0.5)(500)/512$ نيوتن ≈ 0.5 نيوتن

ب- ما هي القوة الكلية التقريبية على إطار البيانو الذي يحتوي جميع الأوتار؟

يحتوي البيانو 88 مفتاحاً، العديد من النوتات لديها وترين والعديد منها لديها ثلاثة أوتار. وبعضها لديه فقط وتر واحد. بيانو "ستاينواي" الضخم يحتوي على 216 وتراً. وهذا يترجم إلى $F = 216 \times 250$ نيوتن $\approx 5.4\,10^4$ نيوتن. هذه قوة كبيرة جداً. إنها تساوي تقريباً وزن كتلة 54 ألف كيلو غرام (54 طن)!!

اضغط باستمرار على مفاتيح متنوعة (واحد في كل مرة) بحيث ينتهوا من التخامد من دون إصدار النوتة . وبينما لا تزال تضغط على المفتاح الذي اخترته، انقر G_5 بحدّة، اضغطه لعدّة ثواني ثمّ اتركه (لا تزال تضغط على المفتاح الآخر). استمع بدقة. أنت تسمع بوضوح صوتاً في حال كنت قد اخترت C_4 أو G_6.

ت- ما هو التردد الذي تسمعه في الحالتين؟

سيثير G_5 التوافقي الثاني لـ C_4 وستسمع G_5. التوافقي الأساسي لـ G_5 لن يثير G_6. على أي حال، التوافقي الثاني لـ G_5 سيثير G_6 وستسمع G_6.

ث- أي نوتات أخرى يمكن أن تثار بواسطة G_5؟ (G_5 أيضاً ينتج توافقيات مرتفعة) تحقّق من توقعاتك.

نوتة ذات توافقية مرتفعة لـ G_5 ستكون مثارة (مثل G_6, D_7, G_7, B_7)، أيضاً نوتة أدنى من G_5 والتي يكون G_5 أحد توافقياتها المرتفعة ستكون مثارة (مثل .. $G_4, C_4, G_3, E^b{}_3, C_3,$).

لشرح التوافقيات المرتفعة، سنجعلك تسمع التوافقي السادس لـ C_3. اضغط على المفتاح C_3 (لا تفلت إصبعك عنه)، انقر G_5، اضغطه لعدة ثواني ثمّ اتركه. استمع بدقة الآن للصوت الصادر عن أوتار C_3. هذا الصوت هو التوافقي السادس لـ C_3.

وضوحاً، إذا لم يكن البيانو مدوزناً، سيكون الصوت مختلفاً تماماً، ولكن حتّى لو كان مدوزناً ، ربما تلاحظ عند الاستماع بدقة أنّ صوت G_5 ليس تماماً كالتوافقي السادس لـ C_3. يبدو أن أوتار البيانو لا تتصرف بشكل مثالي كما افترضنا في البداية.

ج- كيف يمكنك شرح ذلك؟

لا يوجد وتر مرن ومتصل تماماً. بالإضافة إلى ذلك، قوة الاستعادة على الوتر خطيّة فقط مع التقريب الأول، وبالتالي من غير الممكن للأوتار أن تملك توافقيات تكون أضعاف بعضها البعض بشكل جيد. سنعلم قريباً جداً أنّ السرعة الاتجاهية هي دالة بالنسبة للتردد أو الطول الموجي. تدعى هذه الظاهرة بالتشتت. حتى الآن، نحن دائماً نفترض أن الأوتار مثالية حيث السرعة $v = \sqrt{T/\mu}$ (مستقلة عن v).

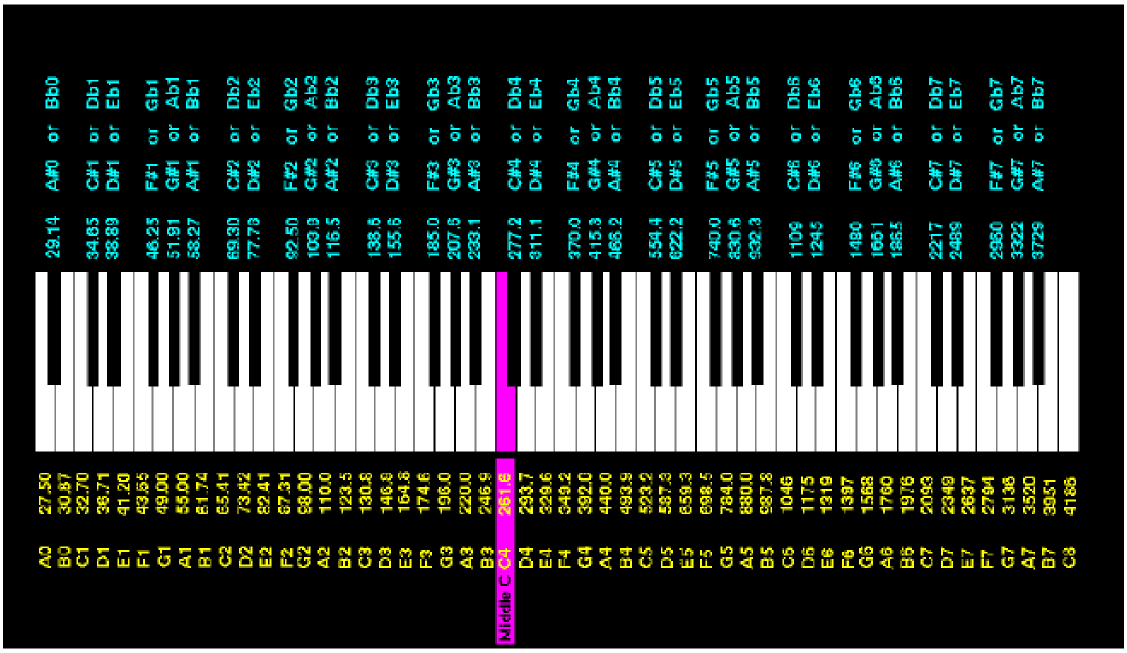
يوجد سبب آخر من أجل الفرق في النغمة بين G5 والتوافقي السادس لـ C3: البيانو المتناغم (المدوزن)، هو ليس مدوزناً بالنسبة لمعيارنا العلمي. الجوابات مدوزنة تماماً عند أضعاف 2 (تردد). ولكن كل الفواصل الأخرى معدّلة بعض الشيء. وبالنتيجة، التوافقي الخامس المثالي ليس مثالياً. لمزيد من المعلومات انظر

Waves (Berkeley Physics Course Vol. 3), by Crawford, problem 2.6 pp 91-93.

أدنى نوتتان في البيانو هما 27.5 A_0 و 29.1 $A\#_0$. تردد الخفقان لهما هو 1.6 هرتز، حيث من السهل كشفه. انقر النوتتان معاً بلطف، عندما تعتقد أنك تسمع خفقان، اترك أحد المفاتيح ولكن لا تترك الآخر.

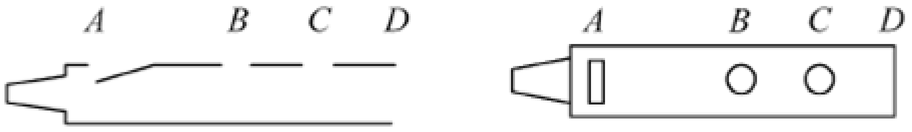
ح- هل اختفى الخفقان؟

سيختفي الخفقان طالما أنه نتيجة تراكب المنحنيات الجيبية للعقدتين.



السؤال 5-2: ثقوب في آلات النفخ الموسيقية

مزمار مبسّط كما هو في الشكل، مفتوح عند D. هناك أيضاً فتحة كبيرة عند A (بالقرب من قطعة الفم) و هناك ثقبان عند B و C. [AB = BD, BC = CD]. طول AD تقريباً 37 سم. سرعة الصوت حوالي 240 متر/ثانية. ما هو التردد الذي تتوقع أنك ستسمعه عندما تنفخ في المزمار وعندما:



مقطع عرضي   نظرة من الأعلى

أ- تغلق كلا الثقبين B و C؟

عند إغلاق الثقبين C و B، سيكون طول الأنبوب 37 سم، ومفتوح من الجانبين. لذلك:

$$\lambda = 2L = 74 \text{ سنتمتر}$$
$$\Rightarrow \nu = \frac{v}{\lambda} = 446 \text{ هرتز}$$

ب- تغلق فقط الثقب C؟

إذا كانت الثقوب كبيرة بشكل كافٍ، سيكون طول الأنبوب 18.5 سم، ومفتوح من الجانبين.

وبالتالي v = 892 هرتز.

ت- تغلق فقط الثقب B؟

عند إغلاق الثقب B فقط، سيكون الطول الفعلي للأنبوب هو AC ولذلك $\lambda = 2(27.7 \text{ سم}) = 55.4 \text{ سم}$. وبالتالي v تساوي 600 هرتز.

ث- عندما لا تغلق أي من الثقبين B أو C؟

عند عدم إغلاق أي من الثقبين B أو C، الطول سيكون تقريباً يساوي 18 سم، وبالتالي $\lambda = 2(18.5 \text{ سم}) = 37 \text{ سم}$. وستكون v تساوي 892 هرتز.

ضع في ذهنك أنه حيثما يوجد الهواء داخل المزمار المفتوح سيكون متصلاً بالهواء الخارجي، وبالتالي لن يكون هناك تراكم للضغط (عقد ضغط). الآن اقرأ الصفحتين 204 و 205 من كتاب "الأبواق، الأسلاك والتوافق" للكاتب "بيناد"، ثم أعد ترتيب إجابات.

إذا كنت تعزف على أي آلة نفخيّة، ننصحك بشدّة بقراءة الفصل IX من كتاب "الأبواق، الأسلاك والتوافق" للكاتب "بيناد". إنه ممتع جداً

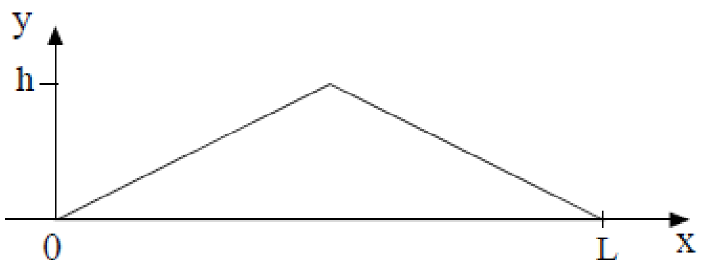
السؤال 5-3: سلك معكوف.

قم بحل المسألة 6 - 12 من كتاب "فرنش"

A. P. *Vibrations and Waves.* New York, N.Y.: W. W. Norton and Company, January 1, 1971. ISBN: 0393099369

سلك طوله L مثبت من الجانبين وقوة الشد عليه T، نسحبه من المنتصف مسافة h ثم نتركه.

يوضح الشكل التالي شكل السلك:



أ- ما هي طاقة الاهتزازات المتلاحقة؟

تذكّر أنّ كثافة الطاقة الحركية للموجة y(x,t) في السلك هي:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

وكثافة الطاقة الكامنة:

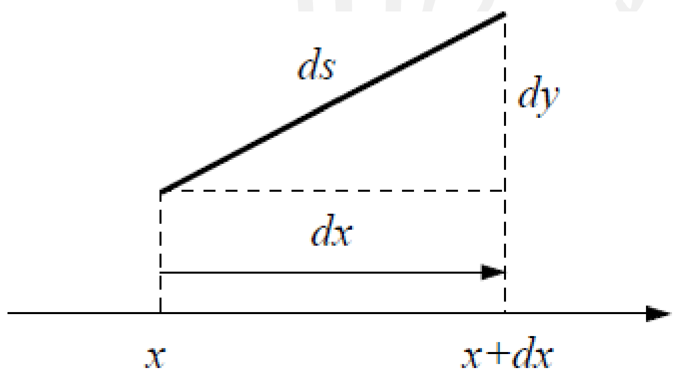
$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

هنا μ هي كثافة الكتلة، و T قوة الشد في السلك، وبالتالي الطاقة الكلية للسلك عند t=0 :

$$\begin{aligned}
E &= K + U = U \quad (K = 0 \text{ at } t = 0) \\
&= \int \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} T L \left(\frac{2h}{L} \right)^2 \\
E &= \frac{2h^2 T}{L}.
\end{aligned}$$

بما أن الطاقة مُصانة (نهمل أي ضياع في الطاقة بسبب التخامد)، الطاقة عند t=0 هي نفس الطاقة في أي وقت لاحق.

بدلاً عن ذلك، يمكننا حساب الطاقة الكامنة للسلك مباشرة. يمكن أن تحسب الطاقة الكامنة بإيجاد الزيادة في طول السلك عندما تم سحبه للأعلى. حاصل ضرب هذه الزيادة بثابت قوة الشد المفترض T هو العمل المنجز من قبلنا ليأخذ السلك شكله بعد سحبه للأعلى. يظهر الشكل التالي جزء متناهٍ في الصغر من السلك.



من أجل الجزء الصغير، لدينا

$$dU = T(ds - dx)$$

حيث

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
&= dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}
\end{aligned}$$

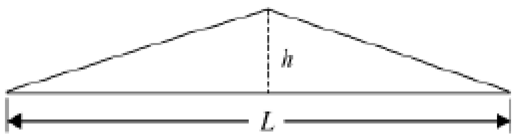
إذا افترضنا أنّ الإزاحات العرضية صغيرة وبالتالي $\partial y/\partial x \ll 1$، بإمكاننا تقريب العبارة أعلاه باستخدام النشر ذو الحدّين لحدّين:

$$ds - dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

لذلك

$$\begin{aligned} dU &\approx \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \\ \Rightarrow \frac{dU}{dx} &= \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \end{aligned}$$

ب- كم مرةً سيظهر الشكل الموضح أدناه من جديد؟



من اختيارنا للإحداثيات، شكل السلك وكل الاهتزازات المتلاحقة ستكون دوالاً فردية. وبالتالي يمكننا تطبيق تحويل "فورييه" لتحليل حركة الموجة إلى دوال sin فقط. ستكون صيغة الدوال $y_n(x,t) = A_n \sin \omega_n t$، حيث A_n سعة التوافقي n، $\omega_n = n\omega_1$ و ω_1 هو التردد الزاوي للتوافقي الأول (الأساسي). الشكل الابتدائي للسلك يتكرر عند التردد الزاوي ω_1 لأنّ كل التوافقيات تتكرر عند المضاعفات الصحيحة للتوافقي الأول.

يمكننا حساب $\omega 1$ من العلاقة $\omega_n = k_n v$. نعلم أن التوافقي الأول لديه طول موجة $\lambda_1 = 2L$، وبالتالي $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = \pi/L$. ولذلك $\omega_1 = \pi v/L = \pi/L\sqrt{T/\mu}$. عندها سيتكرر شكل النبضة الابتدائية كل $2L\sqrt{\mu/T}$ ثانية. لاحظ أن هذا هو زمن ارتحال النبضة من إحدى نهايتي السلك إلى الأخرى وعودتها.

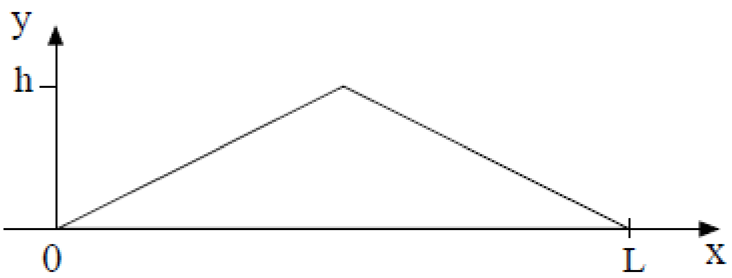
السؤال 5-4: تحليل "فورييه"

أ- أوجد سلسلة "فورييه" للدالّة الموضحة في الشكل الموجود في المسألة 5-3.

الدالة هي:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{2h}{L}x & \text{if } 0\le x<L/2\\ -\frac{2h}{L}x+2h & \text{if } L/2\le x\le L,\end{cases}$$

ويوضح الشكل التالي شكل (y(x:



الصيغة الأكثر عموميةً لتوسيع "فورييه" هي:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(k_nx)+B_n\sin(k_nx)$$

بما أنّ f(0) = 0، كل الحدود التي تحتوي على cos ستختفي. بالإضافة إلى ذلك،

$$\begin{aligned}y(L)&=0\\ \sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin(k_nL)&=0.\end{aligned}$$

بشكل عام، $B_n\neq 0$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}\sin(k_nL)&=0\\ \Rightarrow k_nL&=n\pi\\ k_n&=\frac{n\pi}{L}.\end{aligned}$$

وبالتالي توسيع "فورييه" لـ y(x):

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

لاحظ أن الجمع يبدأ عند n = 1. الحد n=0 يساوي 0 ولذلك لا يساهم في الجمع. يمكننا إيجاد قيمة B_n وذلك بضرب الطرفين بـ $\sin(m\pi x/L)$ و مكاملتها بالنسبة لـ x:

$$\begin{aligned}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)y(x)\,dx &= \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx\\ \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)y(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.\end{aligned}$$

سنستخدم خاصية التعامد للدالة sin

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx=\begin{cases}0 & \text{if } m\neq n\\ \frac{L}{2} & \text{if } m=n.\end{cases}$$

وبالتالي:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)y(x)\,dx=B_m\frac{L}{2}.$$

وبالتالي تكون معاملات "فورييه":

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)y(x)\,dx\\ &= \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\frac{2h}{L}x\,dx+\int_{L/2}^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2h}{L}x+2h\right)\,dx\right]\\ &= \frac{4h}{n^2\pi^2}\left[2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right]\\ &= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

فيما يلي نعرض بعض قيم B_n:

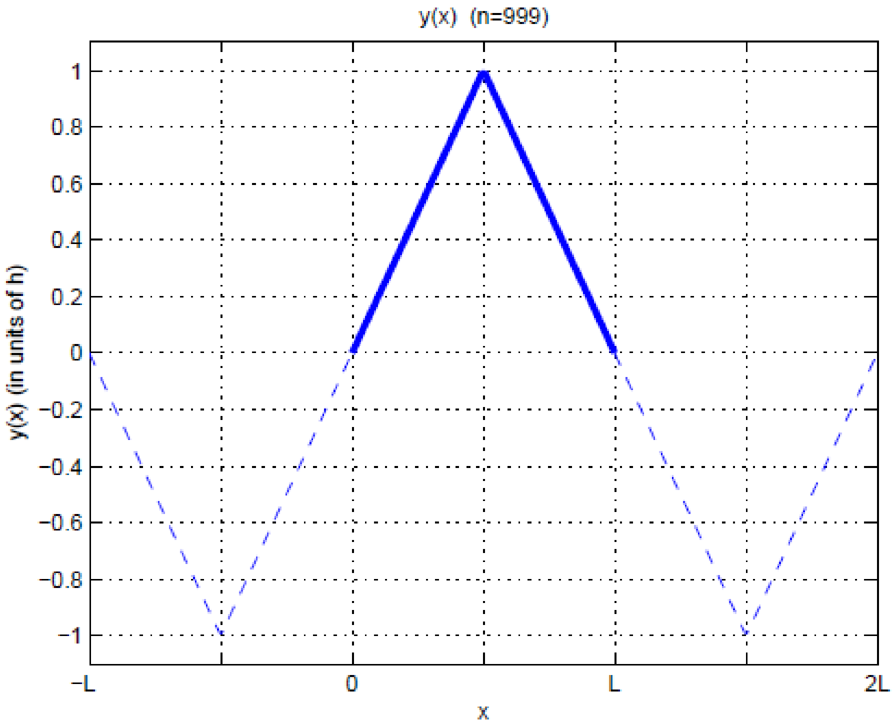
$$B_1 = \frac{8h}{\pi^2} \quad B_3 = -\frac{8h}{9\pi^2} \quad B_5 = \frac{8h}{25\pi^2}.$$

لاحظ أنّ B_n تساوي 0 من أجل جميع قيم n الزوجية، وإشارة B_n تتناوب بين السالب والموجب من أجل قيم n الفردية. كان بإمكاننا توقع ذلك، لماذا؟

توسيع "فورييه" لـ x(y) هو:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

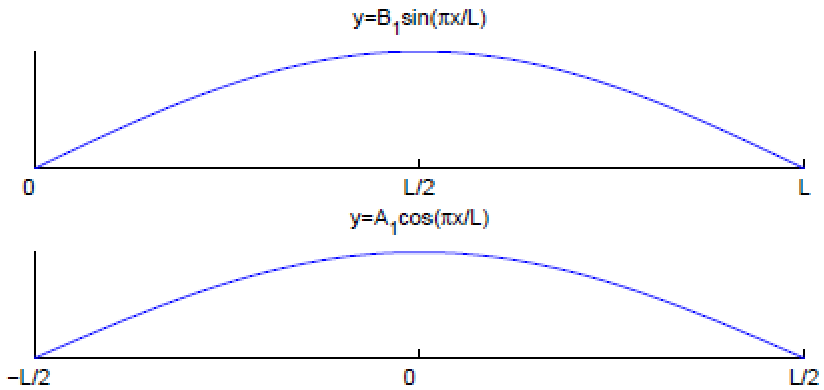
يوضح الشكل التالي الرسم البياني لـ y(x) من أجل قيم x<0 و x>L و 999 → n = 1:



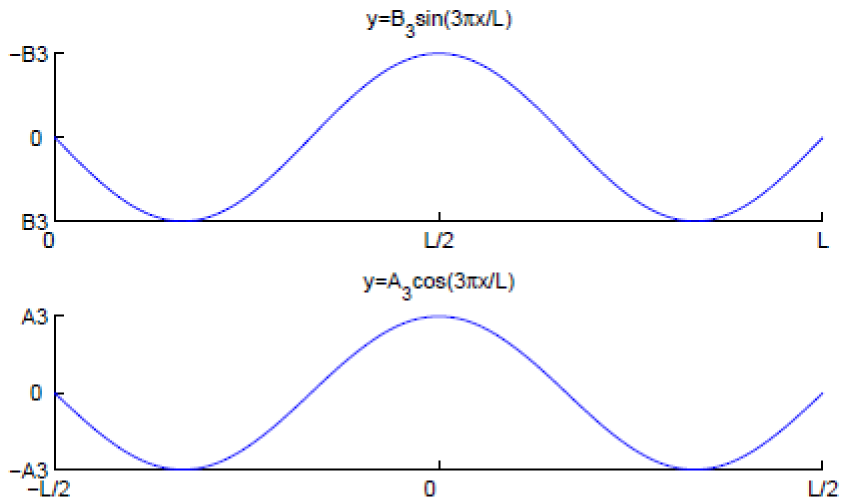
لاحظ أنّ الدور المكاني لهذه الدالّة يساوي 2L والقيمة الوسطية خلال هذا الدور هي 0. عوضاً عن ذلك، كان بإمكاننا إزاحة الدالة كي تكون الذروة عند x=0 وتوسعت بدلالة cos على الدور المكاني 2L. كل الدوال ستكون عندها زوجية. بما أن كل ما نقوم به هو إزاحة الدالة بمقدار L/2، نتوقع أن معاملات "فورييه" لتوسيع sin، B_n، تساوي مقدار (قيمة) معاملات "فورييه" An في توسيع cos.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

من السهل رؤية لماذا مقادير المعاملات لسلسلة sin و cos يجب أن تكون متساوية. انظر إلى الشكل البياني للتوافقي الأول من أجل كل سلسلة.



من الواضح أن $A_1 = B_1$. الحالة من أجل التوافقي الثالث مشابهة. تذكر أنّ $B_3 < 0$.



$A_3 = - B_3$، وبالتالي يكون لدينا:

$$A_1 = B_1 \quad A_3 = -B_3 \quad A_5 = B_5 \quad A_7 = -B_7 \quad \ldots$$

عوضاً عن ذلك، كان بإمكاننا حساب توسيع "فورييه" حيث الطول الموجي المكاني يساوي L. في تلك الحالة، تحليل الدالة (الذروة عند x=0):

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x + h & \text{if } -L/2 \le x < 0 \\ -\frac{2h}{L}x + h & \text{if } 0 \le x \le L/2, \end{cases}$$

سيكون لدينا الصيغة:

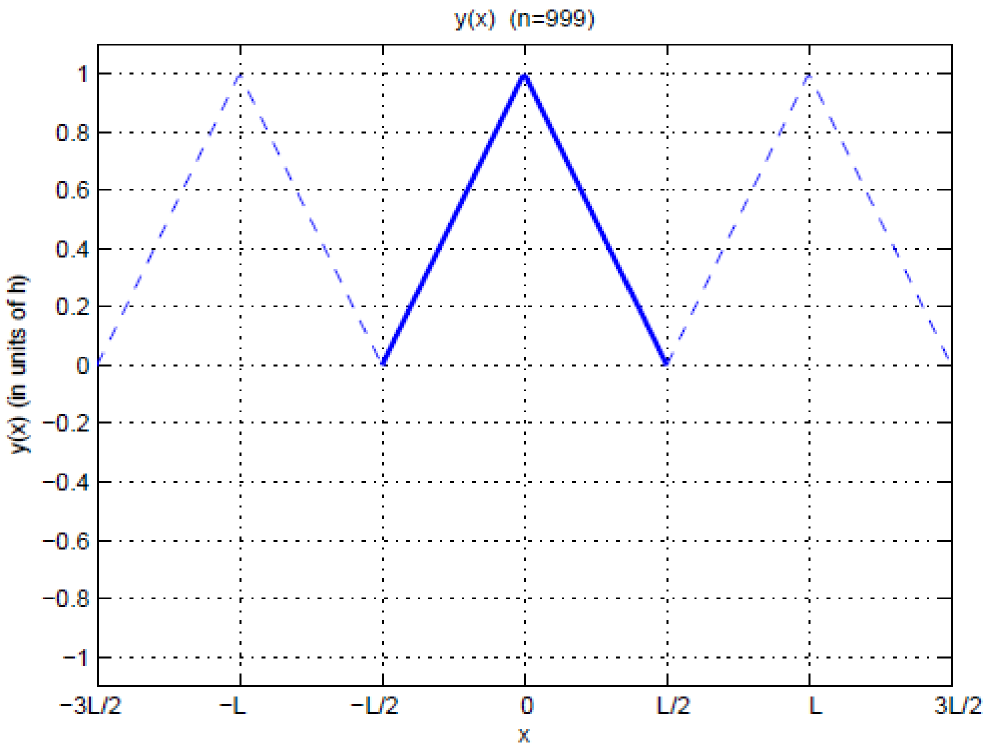
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right).$$

أقنع نفسك أنّ حد الـ sin غير مسموح في تحليل "فورييه" الزوجي هذا. سيكون توسيع "فورييه" في هذه الحالة:

$$y(x) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

لاحظ أنّ الحد الثابت h/2 هو متوسط قيمة y(x) على دور مكاني واحد. هذا الثابت يأتي من الحد n=0.

يوضح الشكل التالي الشكل البياني لتوسيع "فورييه".



التوسيع الآن زوجي، ويحتوي على متوسط h/2 غير صفري ودور مكاني L.

بما أنّ تحليل "فوربيه" هذا يعطي شكل الدالة الأصلية في المجال $[-L/2, L/2]$، إنه حل رياضي صحيح. في الجزء (ت) سنرى أن هذا التحليل ليس صحيحاً فيزيائياً إذا تركنا السلك يتطور مع مرور الزمن.

ب- إذا حررنا السلك عند اللحظة t=0. كيف سيبدو شكل السلك (f(x,t)) عند اللحظة t؟

نعلم كيف تتطور المنحنيات الجيبية مع مرور الزمن. مثلاً المنحني الجيبي $y(x) = A\sin(kx)$ يتطور كـ $y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t + \phi_t)$، حيث ω هو تردد الاهتزازات المعطى من علاقة التشتت و ϕ_t هي الطور المؤقت للاهتزازات. الشرط الابتدائي y(x,0) = y(x) يتطلب $\phi_t = 0$. كل مركبات "فوربيه" لشكل السلك $B_n \sin(k_n x)$ ستتطور كـ $B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$، حيث $\omega_n = k_n v = n\pi\sqrt{T/\mu}/L$. سيتطور شكل السلك وفق:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt\right).$$

حيث $v = \sqrt{T/\mu}$ هي سرعة الانتشار.

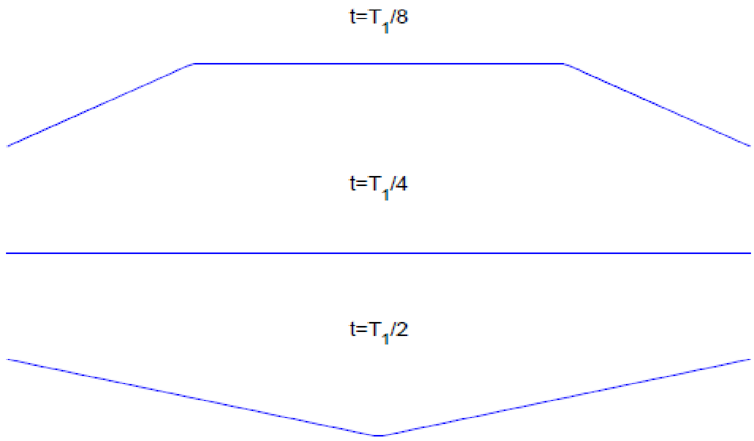
هل كان بإمكاننا القول بأنّ شكل السلك يتطور وفق المعادلة التالية؟

$$y(x,t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}vt\right)$$

الإجابة هي "لا": جرب ذلك، ستلاحظ أنه عند $t = T_1/4$ السلك بالكامل سيكون عند الموضع h/2 (والنهاية ليست ثابتة).

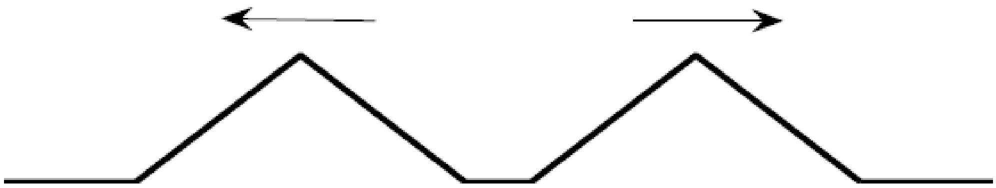
يوضح الشكل التالي تراكب أمواج "فوربيه" المستقرة من أجل:

$t = T_1/8, T_1/4$ و $T_1/2$ $(n = 1 \to 999)$.

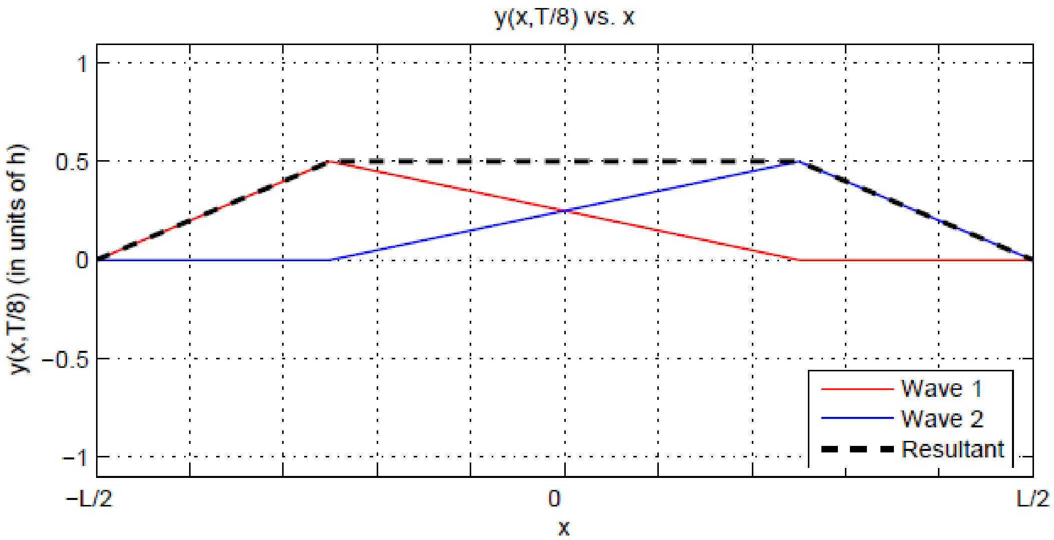


ت- ارسم شكل السلك عند $t= T_1/8, T_1/4, T_1/2$. حيث T_1 هو دور التردد الأصغر (التوافقي الأول). باستخدام برنامج الماتلاب (بالرغم أنه غير مطلوب) يمكنك القيام بعمل عظيم.

هناك طريقة بديلة للتفكير حول التطور خلال الزمن. في اللحظة التي تحرر فيها السلك، سينتشر مثلث (ارتفاعه $h/2$) نحو اليمين والمثلث الآخر سينتشر نحو اليسار



الشرط الحدّي $y(\pm L,t)=0$ يجب أن يتحقق طوال الوقت. يوضح الشكل التالي الأمواج المرتحلة والنتيجة عند $t = T/8$. استخدام السلك المثبت من الجانبين يقتضي أنّ يكون معامل الانعكاس يساوي 1-. وبالتالي ستنقلب الموجة الواردة عند نهاية السلك. في البداية الموجة الأولى ترتحل نحو اليسار والموجة الثانية ترتحل نحو اليمين. لاحظ أنّ 999/2 موجة مستقرة متطورة و 2 موجة مرتحلة تعطي نتائج غامضة.



السؤال 5-5: سلسلة "فورييه"

قم بحل المسألة 6 - 14 من كتاب "فرنش"

A. P. *Vibrations and Waves.* New York, N.Y.: W. W. Norton and Company, January 1, 1971. ISBN: 0393099369

أوجد سلاسل "فورييه" للدالات التالية ($(0 \leq x \leq L)$):

(a) $y(x) = Ax(L - x)$.

(b) $y(x) = A\ sin(\pi x/L)$.

(c) $y(x) = \begin{cases} A\ sin(2\pi x/L) & (0 \leq x \leq L/2) \\ 0 & (L/2 \leq x \leq L) \end{cases}$

توسيع "فورييه" الأكثر عمومية هو:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x + \phi_n).$$

الشروط الحدية للدوال في هذه المسألة هي $y(0,t) = y(L,t) = 0$، وهذا يقتضي $\phi_n = \pi/2$ و $k_n = \pi n/L$. وبالتالي:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

لاحظ أن الجمع الآن يبدأ من n=0 وليس n=1. الحد n=0 يساوي 0 وبالتالي لا يساهم في الجمع.

معاملات "فورييه"، A_n، يمكن أن نحددها من خلال ضرب العبارة الأخيرة بـ $\sin(k_m x)$ و المكاملة:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \sin(k_m x)\, y(x)\, dx &= \int_0^L \sin(k_m x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\ dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x)\ dx \\
&= A_m \frac{L}{2} \\
\Rightarrow A_m &= \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)\ dx
\end{aligned}$$

أ- الدالّة هي:

$$y(x) = Ax(1-x)$$

من المناقشة أعلاه:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L Ax(1-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{2AL^2}{\pi^3 n^3}\left(2-\underbrace{2\cos n\pi}_{+1 \text{ n زوجي } -1 \text{ n فردي}} - n\pi\underbrace{\sin n\pi}_{=0\,\forall n}\right) \\
\Rightarrow A_n &= \frac{8AL^2}{\pi^3}\frac{1}{n^3} \quad n = 1,3,5,7\ldots
\end{aligned}
$$

ب- توسيع "فورييه" للدالة المثلثية هو نفسه. بالتفحص، معاملات "فورييه" هي:

$$
A_n = \begin{cases} A & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n \neq 0. \end{cases}
$$

وبشكل رسمي أكثر:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \begin{cases} A & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ت- الدالة هي:

$$
y(x) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) & \text{if } 0 \leq x < L/2 \\ 0 & \text{if } L/2 \leq x \leq L. \end{cases}
$$

وبالتالي تكون معاملات "فورييه":

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)\,dx \\ &= \frac{2A}{L}\int_0^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\ &= -\frac{4A}{\pi}\frac{1}{n^2-4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

يجب أن نكون الآن حذرين لأن A_n غير محددة عند n=2. يمكننا تقييم A_2 باستخدام قاعدة "لوبيتال":

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{4A}{\pi}\left.\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}\right|_{n=2} \\ &= \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

عندما تكون n زوجية (ماعدا n=2)، $A_n = 0$. وبالتالي:

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 4,6,8\ldots \\ \frac{A}{2} & \text{if } n = 2 \\ \frac{4A}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{4-n^2} & \text{if } n = 1,3,5,7\ldots \end{cases}$$

السؤال 5-6: البيانو يمكنه يرد عليك عندما تكلمه

قم بزيارة البيانو مرة أخرى (لا يجب أن يكون مدوزناً). افتح الغطاء وبالتالي يمكنك رؤية الأوتار. اضغط باستمرار على دعسة المثبط. اصرخ "هيييبي" (استمر في ذلك لعدة ثواني) في منطقة الأوتار ولوح المصوت. إذا كان البيانو ضخماً، سيكون ذلك رائعاً! اصرخ "أووووو". جرب كل الحروف الصوتية. أوتار البيانو تستجيب لصوتك. إنها نوع من "تحليل "فورييه"" للصوت. تنتج الأوتار صوتك لعدّة ثواني.

أ- اشرح كيف يمكن تفسير تلك العملية الرائعة لتحليل "فورييه". لماذا ليس من الضروري أن يكون البيانو مدوزناً؟

الصوت الذي تصنعه هو عبارة عن تراكب ترددات مختلفة. كل وتر داخل البيانو سيستجيب للتوافقيات الخاصة به. وبالتالي سيتجزأ صوتك إلى ترددات، وترددات مختارة سيتم عزفها ثانية من قبل البيانو. في هذه الحالة، البيانو يقوم بتحليل "فورييه" لصوتك. لا نحتاج لأن يكون البيانو مدوزناً، نحتاج فقط لأن يحتوي على مركبات كافية ليجعل صوتك ممكن تمييزه.

كل المركبات (مع الترددات $\omega_1, 2\omega_1, \ldots\ldots n\omega_1$) في تحليل "فورييه" حقيقي، إمّا داخل الطور أو خارج الطور. على أي حال، إنّك لن تنجح في جعل كل أوتار البيانو التي تشارك في تحليل صوتك تهتز داخل الطور (أو خارج الطور).

ب- لماذا لا؟ أعطي إجابة كميّة.

نسب الترددات التوافقية للأوتار لن تكون تماماً ...1:2:3 لأنّ البيانو ليس مدوزناً (انظر المسألة 5-1). بالإضافة إلى ذلك، الاهتزازات لن تكون داخل الطور، بسبب الفرق في وقت الارتحال لصوتك إلى الأوتار (حوالي 1 متر في 3 ميلي ثانية). خلال 3 ميلي ثانية، الوتر الذي تردده 330 هرتز سينجز اهتزازاً وحيداً كاملاً، السلك ذو التردد 1000 هرتز سينجز 3 اهتزازات، إلخ.

ت- على الرغم من الغياب الكامل لعلاقات الطور، نحن نسمع بوضوح البيانو يصدر صوتنا. ماذا تستنتج من ذلك حول أهمية الأطوار النسبية ـلمركبات "فورييه" التي تركب الصوت- لأذنك ودماغك؟

كما يبدو، الطور غير مهم.

ث- كيف يمكنك شرح ذلك؟

لا يمكننا شرح هذا. ولكن هذه هي الطريقة التي تعمل بها عقولنا. ربما التطور لم يكتشف أي قيمة تستطيع الحفاظ على الطور.