حل الواجب المنزلي 10

قراءات مفيدة قبل حل الواجب

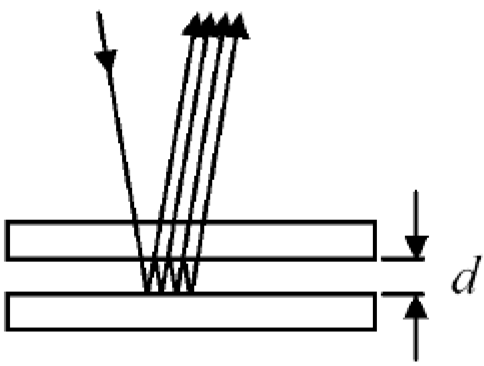
كتاب "باكفي & باريت": الصفحات 519-522، 525&526، 532-548

السؤال 10-1: تداخل الطبقة الرقيقة

قم بحل المسألة 8-1 من كتاب

Bekefi, and Barrett. *Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation*. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 0262520478.

يرد ضوء أبيض بشكل عمودي على طبقة هواء رقيقة سماكتها d، تقع بين مستويين (صفيحتين) زجاجيين. ماذا يجب أن يكون أصغر سماكة للطبقة الرقيقة d إذا كان سينعكس بشدّة فقط ضوء أزرق طول موجته 4000 أنغستروم ($= 4 \times 10^{-7}$ متر) ؟



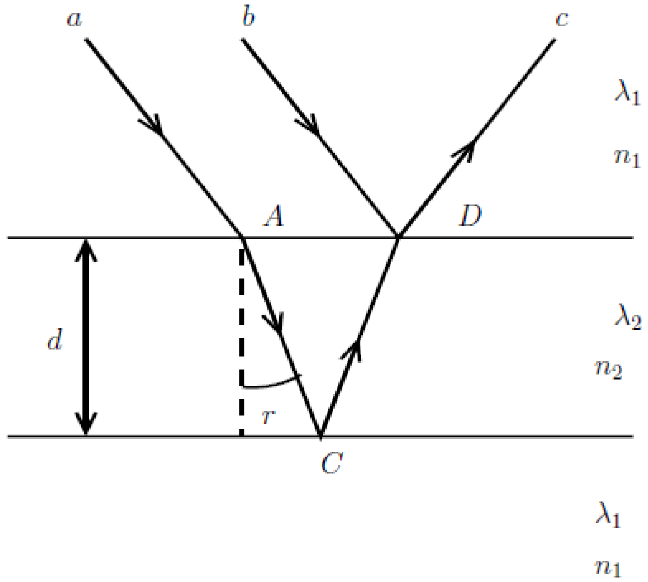


FIG. 1: Problem 10.1 Thin film interference

الزجاج أسمك من أن يصنع "تداخل الطبقة الرقيقة". لذلك سنركز فقط على فجوة الهواء. فرق الطور بين a و b بعد الاندماج في c يساوي:

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda_1}\frac{n_2}{n_1}\cos r + \pi \tag{1}$$

من أجل التداخل البنّاء، سيكون الشرط $\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \ldots)$. في حالة الورود العمودي (cos r =1)، يمكن أن تعدّل المعادلة إلى:

$$\lambda_{1m} = \frac{4dn_2}{(2m-1)n_1} \qquad \lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = 4d \qquad m = 1 \text{ من أجل}$$

$$d = \frac{\lambda_2}{4} = 1\times 10^{-7} \text{ متر} \qquad \lambda_2 = 4 \text{ حيث}$$

$$= 100 \text{ نانو متر}$$

كان يمكن تخمين الإجابة بدون هذه الحسابات التفصيلية. إذا كان $d = \lambda_2/4$ فمسافة الارتحال الإضافية تساوي $\lambda_2/2$. بالإضافة إلى ذلك، سيكون هناك فرق طور π. عندما ينعكس الضوء D على وسط أقل كثافة (أعني الهواء) $(n_2 < n_1)$ وبالتالي لن تتغير إشارة $\vec{E}$. على أي حال، عند C هناك انعكاس عند

سطح أكثف (أعني الزجاج) وبالتالي طور $\vec{E}$ يتغير بمقدار π. وبالتالي مسافة الارتحال الإضافية في فجوة الهواء بالإضافة إلى تغيّر الإشارة في E سيؤديان معاً إلى تغيير بمقدار 2π في الطور إذا كان $d=\lambda_2/4$.

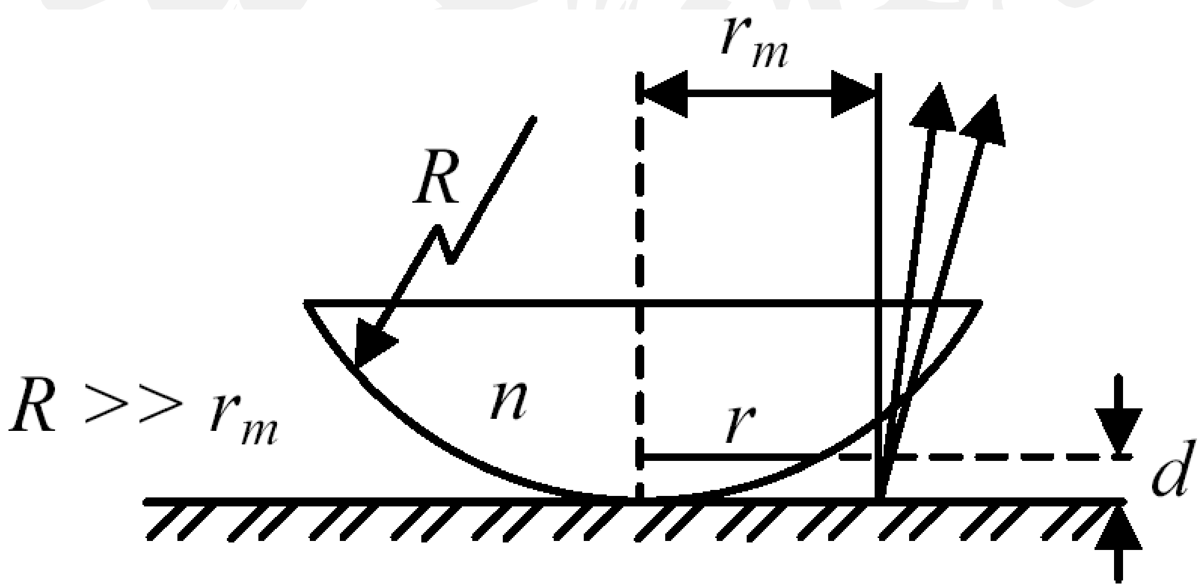
السؤال 10-2: حلقات "نيوتن"

قم بحل المسألة 8-4 من كتاب

Bekefi, and Barrett. *Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation*. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 0262520478.

كانت هذه المسألة إحدى مسائل الامتحان النهائي في ربيع 2004.

قطعة زجاج محدبة مستوية (قرينة الانكسار n)، تقع في مستوٍ موازٍ من الزجاج كما هو موضح في الشكل. نصف قطر السطح الكروي R وهو أكبر بكثير من r_m. يرد ضوء (الطول الموجي λ) بشكل عمودي وينعكس عند السطح الفاصل زجاج-هواء وعند السطح الفاصل هواء-زجاج للمستوي الزجاجي. تتداخل الحزم المنعكسة لتشكل سلسلة متناوبة من دوائر مظلمة ومشعّة متحدة المركز عندما ننظر إليها من الأعلى.



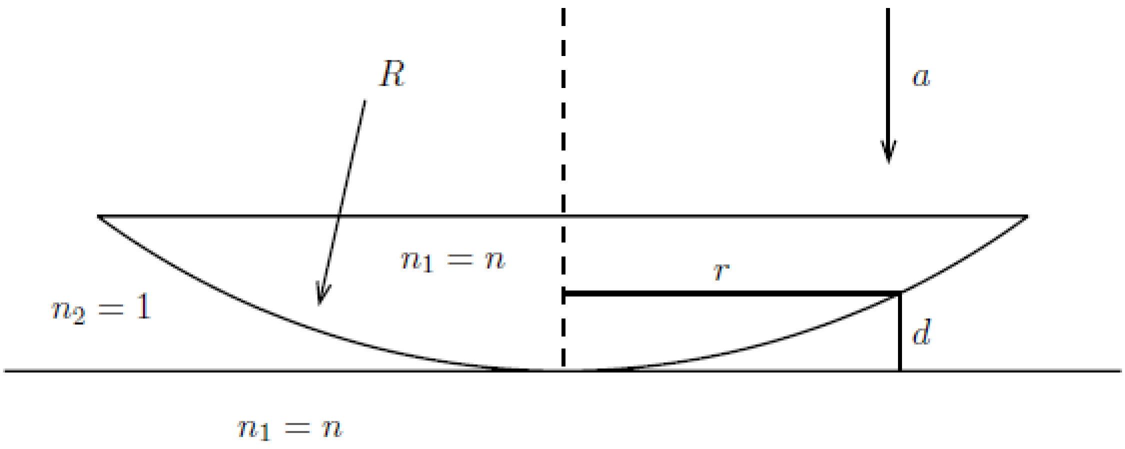


FIG. 2: Problem 10.2 Newton Rings

أ- أوجد المسافة الشعاعية r من نقطة الاتصال حيث المسافة الفاصلة بين السطح الكروي وقطعة الزجاج في حالة الاسترخاء هي d. أي أوجد العلاقة بين r و d.

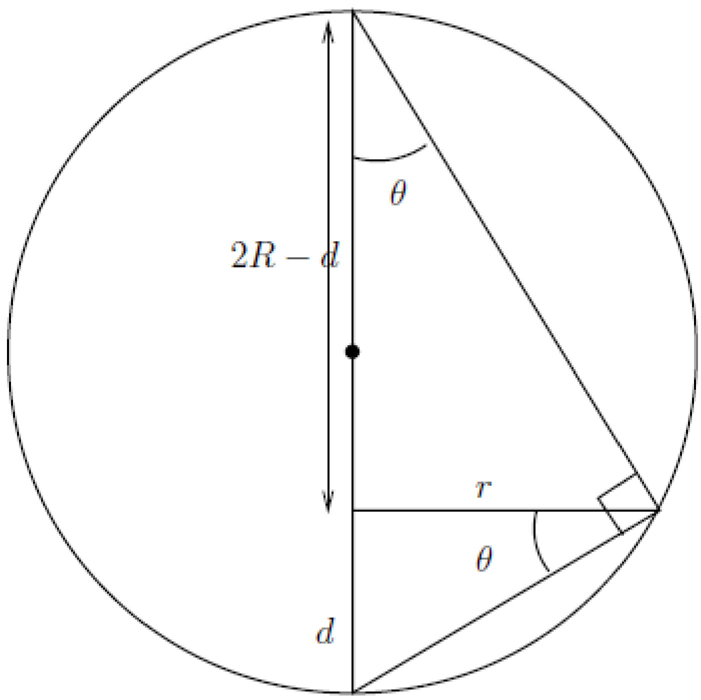


FIG. 3: Problem 10.2(a) Newton Rings

من الشكل 3:

$$\begin{aligned}
\sin\theta = \frac{r}{2R-d} &= \frac{d}{r} \\
\Rightarrow \qquad r^2 &= d(2R-d) \\
\Rightarrow \qquad r^2 &\simeq 2dR \qquad\qquad (d^2 \ll dR) \\
d &\simeq \frac{r^2}{2R} \qquad\qquad (2)
\end{aligned}$$

ب- استنتج علاقةً من أجل المسافات الشعاعية r_m، التي ستكون عندها الحلقات المشعّة ملاحظة.

من أجل الأشعة a كما هو موضّح في الشكل 3، فرق الطور بين الأشعة التي تنتقل ذهاباً وإياباً في الفجوة d وبين تلك التي تنعكس على السطح المنحني للزجاج هو:

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda_2} + \pi$$

حيث $n_2=1$ و $n_1=n$ و $\lambda_1 = \lambda_2/n$.

من أجل التداخل البنّاء، سيكون الشرط $\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \ldots)$.

وبالتالي:

$$2m\pi = \pi\left(\frac{4d}{\lambda_2} + 1\right) \qquad (3)$$

بدمج المعادلتين 2 و3 ، وتعويض λ_2 بـ λ (إنها طول الموجة في الهواء):

$$r_m = \left[\frac{(2m-1)\lambda R}{2}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

مثال: من أجل λ تساوي 500 نانو متر، و R تساوي 10 متر، تكون بعض أنصاف أقطار الحلقات كالتالي:

$r_1 = 1.58$ مم $\quad r_2 = \sqrt{3} \times 1.58$ مم $\quad r_{13} = \sqrt{25} \times 1.58$ مم $\simeq 7.9$ مم

بعد الحلقة عن حلقة أخرى ينقص مع ازدياد نصف القطر r. نسبة نصف قطر الحلقة (m + 1) إلى نصف قطر الحلقة m تساوي:

$$\sqrt{(2m+1)/(2m-1)}$$

من أجل m=1، تكون النسبة تساوي تقريباً 1.7، من أجل m =13 تكون النسبة تقريباً 1.04.

ت- استنتج علاقةً من أجل المسافات الشعاعية r_m، التي ستكون عندها الحلقات المظلمة ملاحظة. اعتبر R يساوي 2 متر و λ تساوي 640 نانو متر.

من أجل التداخل الهدّام يكون الشرط $\delta = (2m+1)\pi \quad (m = 1, 2, \ldots)$.

$$(2m+1)\pi = \pi\left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right) \tag{5}$$

بدمج المعادلتين 2 و 5:

$$r_m = [m\lambda R]^{1/2} \tag{6}$$

بتعويض القيم، R تساوي 2 متر، و λ تساوي 640 نانو متر، تكون قيم r_m:

$$r_m = 1.13 m^{1/2} \times 10^{-3} \text{ متر} \tag{7}$$

ث- ما هي المسافة الفاصلة (الفرق بين أنصاف الأقطار) بين أول حلقتين مظلمتين، وما هي المسافة الفاصلة بين الحلقة المظلمة رقم 25 والحلقة المظلمة رقم 26.

$r_1 = 1.13$ مم $\quad r_2 = 1.60$ مم $\quad \Delta r_{1,2} = r_2 - r_1 = 0.47$ مم

$r_{25} = 5.66$ مم $\quad r_{26} = 5.77$ مم $\quad \Delta r_{25,26} = r_{26} - r_{25} = 0.11$ مم $\quad (8)$

حيث r_i هي الحلقة المظلمة رقم i.

السؤال 10-3: التجربة المنزلية رقم 6 – تداخل الطبقة الرقيقة

التجارب رائعة جداً وسهلة لتقوم بها، ستعطيك بعد نظر حول ظاهرة التداخل الشائعة والمثيرة للاهتمام (أيضاً فقاعات الصابون والزيت المسكوب على الطريق). أشجعكم بشدة لتقوموا بالتجارب كما سترون المسألة 10-1 و 10-2 أثناء العمل. لا يجب عليكم كتابة نتائجكم لتحصلوا على العلامة الكاملة في هذا الواجب. على أي حال، عند التحضير للامتحان النهائي، سأعتبر أنكم قمتم بهذه التجارب.

أ- تداخل الطبقة الرقيقة لشريحة مجهر

أنا ("تارون آغارول")، تفحصّت أولاً مجموعة من شرائح مجهر نظيفة تحت فتيل مصباح. أنماط تداخل الطبقة الرقيقة كانت واضحة جداً عندما ضغطت على الشريحتين معاً بالقرب من الحافة. النمط كان واضحاً من أجل عدة ميلي مترات حول الأصابع واختفت بالقرب من مركز الشريحة.

لاحظت أن القيم الصغرى -الخطوط المظلمة- كانت متباعدة أكثر عندما ضغطت الشريحتين معاً بشكل أقوى.

عندما قمت بنفس التجربة تحت مصباح فلوريسنت، نمط تداخل الطبقة الرقيقة كان واضحاً على كل الشرائح دون أي حاجة لضغط الشريحتين معاً.

ب- تداخل الطبقة الرقيقة (ورقة رقيقة جداً)

قطعة من غطاء طعام المطبخ مدّت فوق فم كوب، بحيث تكون مستوية وبدون أي التواءات قدر الإمكان. شاهدت انعكاس مصباح فلوريسنت على طبقة ورقة البلاستيك الرقيقة. لم أكن قادراً على تمييز أنماط التداخل بوضوح، وهذا يشير إلى سماكة الطبقة. على أي حال، لاحظت أن ضوء فلوريسنت يبدو وكأنه ظلال مختلفة الألوان، مع مناطق باللون الأحمر، الأخضر أو الأزرق. يشير هذا إلى أنّ بعض الألوان تداخلت بشكل بنّاء. يظهر لنا أنّ للطبقة سماكات مختلفة عند مواضع مختلفة.

عند القيام بنفس التجربة على شريحة غطاء مجهر زجاجية، ظهرت أنماط التداخل مع خطوط كفاف مشعّة ومظلمة بالتناوب. الاختلافات في الشدة كانت صغيرة جداً ولكنها كانت قابلة للملاحظة بشكل أكبر بكثير عند رؤيتها باستخدام إحدى العدسات الموجودة في حقيبة التجهيزات كعدسة مكبّرة.

ت- حلقات "نيوتن"

حاولت أن أرى حلقات "نيوتن" باستخدام عدسات ذات أطول بعد بؤري ووضعها على شريحة المجهر. رأيت التركيب تحت مصباح فلوريسنت.

عندما كانت العدسة مرتكزة على الشريحة، بالفعل كان هناك بقعةً مظلمةً كما هو متوقع من حساباتنا. حول هذه البقعة، كان هناك حلقات رائعة واضحة وخصوصاً قرب حدود مركز البقعة المظلمة. باستخدام عدسات أخرى لتكبير هذه المنطقة، حصلت على نتائج محدودة حيث لم تكن الحلقات واضحة تماماً.

السؤال 10-4: قوس قزح

حزمة ضيقة جداً من ضوء أحمر غير مستقطب، شدته I_0، يرد (عند النقطة A) على قطرة ماء كروية (انظر الشكل). زاوية الورود تساوي 60 درجة. عند النقطة A، بعض الضوء ينعكس وبعضه الآخر ينفذ إلى قطرة الماء. الضوء المنكسر يصل إلى سطح القطرة عند النقطة B حيث ينعكس بعض الضوء ويعود إلى الماء وبعضه ينفذ إلى الهواء. الضوء الذي انعكس إلى الماء يصل سطح القطرة عند النقطة C حيث ينعكس بعض الضوء ويعود إلى القطرة وبعضه ينفذ إلى الهواء. قرينة انكسار الماء من أجل الضوء الأحمر $n = 1.331$.

استخدم ملاحظات محاضرة 16 تشرين الثاني، 2004 (إنها متاحة على الموقع الإلكتروني).

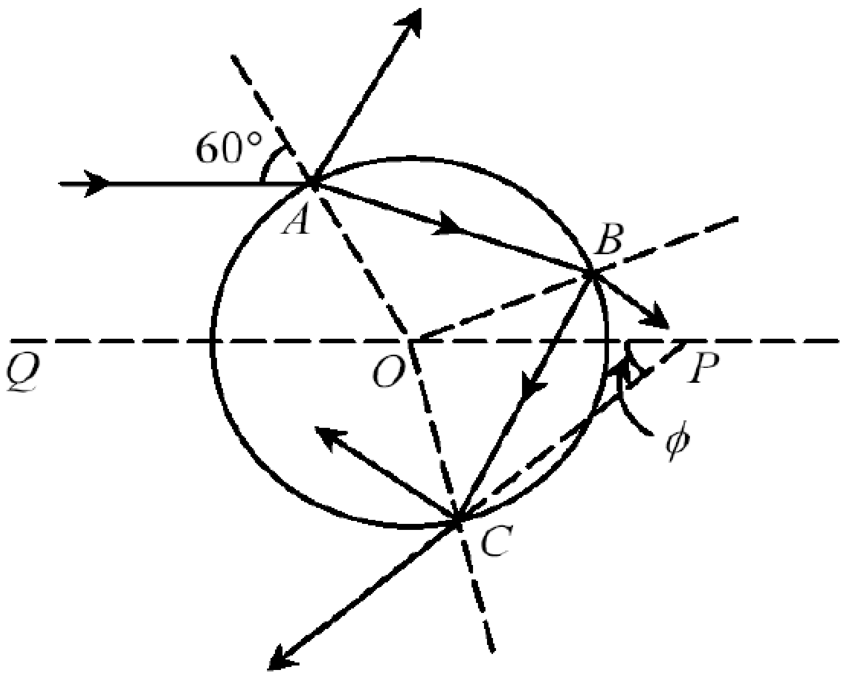


FIG. 4: Problem 10.4

أ- ما هي شدة ودرجة استقطاب الضوء المنكسر إلى القطرة عند النقطة A؟

ضوء وارد غير مستقطَب: $\| \; 0.5I_o$ ، $\perp \; 0.5I_o$

قانون سنل

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 60.00^o & \theta_2 &= 40.59^o \\ n_1 &= 1.000 & n_2 &= 1.331 \\ r_\| &= 0.06587 & I_{r_\|} &= 0.06587^2 \times 0.5I_0 = 0.002170I_0 \\ & & I_{t_\|} &= 0.5I_0 - 0.002170I_0 = 0.4978I_0 \\ r_\perp &= -0.3381 & I_{r_\perp} &= 0.3381^2 \times 0.5I_0 = 0.05715I_0 \\ & & I_{t_\perp} &= 0.5I_0 - 0.05715I_0 = 0.4429I_0 \end{aligned}$$

درجة الاستقطاب الخطي للضوء النافذ:

$$V = \left| \frac{I_{t_\|} - I_{t_\perp}}{I_{t_\|} + I_{t_\perp}} \right| = \left| \frac{0.498 - 0.443}{0.498 + 0.443} \right| = 0.0584 \qquad 5.8\% \tag{9}$$

مستقطب خطي

تسيطر المركبة الموازية.

ب- ما هي شدة ودرجة استقطاب الضوء المنعكس عند النقطة B؟

الانعكاس عند النقطة B. إشعاع وارد: $\perp \; 0.443I_o$ ، $\| \; 0.498I_o$

$$\begin{aligned} \theta_1 = angle\ OAB = angle\ OBA &= 40.59^o & \theta_2 &= 60.00^o \\ n_1 &= 1.331 & n_2 &= 1.000 \\ r_\| &= -0.06587 & I_{r_\|} &= 0.06587^2 \times 0.498I_0 = 0.00216I_0 \\ r_\perp &= 0.3381 & I_{r_\perp} &= 0.3381^2 \times 0.443I_0 = 0.0506I_0 \end{aligned}$$

درجة الاستقطاب الخطي للضوء المنعكس:

$$V = \left| \frac{I_{r_\|} - I_{r_\perp}}{I_{r_\|} + I_{r_\perp}} \right| = \left| \frac{0.00216 - 0.0506}{0.0506 + 0.00216} \right| = 0.918 \qquad 92\% \tag{10}$$

مستقطب خطياً

لا ينبغي أن تكون مفاجأة لكم أنّ الضوء المنعكس عند النقطة B مستقطب بشدة. زاوية "بروستر" من أجل الانتقال من الماء إلى الهواء تساوي 36.9 درجة. زاوية الورود Θ_1 تساوي 40.6 درجة. زاوية الورود تختلف عن زاوية "بروستر" فقط بحوالي 3.7 درجة.

ت- ما هي شدة ودرجة استقطاب الضوء الذي ينفذ للهواء عند النقطة C؟

الإشعاع الواصل عند النقطة C. إشعاع وارد: $0.00216 I_o \parallel$ ، $0.0506 I_o \perp$

$$\begin{array}{rl}
\theta_1 = 40.59^o & \theta_2 = 60.00^o \\
n_1 = 1.331 & n_2 = 1.000 \\
r_{\parallel} = -0.06587 & I_{r_\parallel} = 0.06587^2 \times 0.00216 I_0 = 9.37 \times 10^{-6} I_0 \\
 & I_{t_\parallel} = 0.00216 I_0 - 0.00000937 I_0 = 0.00215 I_0 \\
r_{\perp} = 0.3381 & I_{r_\perp} = 0.3381^2 \times 0.0506 I_0 = 0.00578 I_0 \\
 & I_{t_\perp} = 0.0506 I_0 - 0.00578 I_0 = 0.04482 I_0
\end{array}$$

درجة الاستقطاب الخطي للضوء النافذ:

$$V = \left|\frac{I_{t_\parallel} - I_{t_\perp}}{I_{t_\parallel} + I_{t_\perp}}\right| = \left|\frac{0.00215 - 0.04482}{0.04482 + 0.00215}\right| = 0.9085 \quad \text{91\% مستقطب خطياً} \qquad (11)$$

المركبة العمودية تسيطر.

الخلاصة: شدة الضوء النافذ للهواء عند C يساوي 4.7% $(\perp 4.48\%\ ,\parallel 0.22\%)$ من I_0. الضوء مستقطب خطياً 91% في الاتجاه العمودي.

ث- لتكن زاوية الورود عند النقطة A هي Θ_1 وزاوية الانكسار هي Θ_2. عبّر عن الزاوية Φ (انظر الشكل) كدالة بالنسبة لـ Θ_1 وΘ_2 فقط.

زاوية الورود هي Θ_1 و زاوية الانكسار هي Θ_2.

$$\begin{aligned}
angle\ AOB = angle\ BOC = 180^o - 2\theta_2 \quad &\Rightarrow \quad angle\ AOC = 4\theta_2 \\
angle\ QOC = 4\theta_2 - \theta_1 \quad &\Rightarrow \quad angle\ POC = 180^o - 4\theta_2 + \theta_1 \\
angle\ OCP = \theta_1 \quad &\Rightarrow \quad \phi = 180^o - angle\ POC - angle\ OCP \\
&\qquad = 180^o - 180^o + 4\theta_2 - 2\theta_1
\end{aligned}$$

$$\phi \ = \ 4\theta_2 - 2\theta_1$$

ج- احسب الزاوية Φ في حالة Θ_1 تساوي 60 درجة. قم بذلك من أجل الضوء الأحمر وأيضاً الضوء الأزرق (قرينة الانكسار من أجل الضوء الأزرق تساوي 1.343). سرعة الضوء الأزرق في الماء أبطأ بحوالي 1% من الضوء الأحمر.

ضوء أحمر: $n = 1.331 \quad \theta_1 = 60^o \ \theta_2 = 40.59^o$

$$\phi_{red} = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 42.4^o$$

ضوء أزرق / بنفسجي: $n = 1.343 \quad \theta_1 = 60^o \ \theta_2 = 40.15^o$

$$\phi_{red} = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 40.6^o$$

ح- من أجل طول موجي معطى، يوجد قيمة وحيدة فقط لـ Θ_1 بحيث تكون عندها قيمة Φ أعظمية (Φ_{max}). أثبت أن هذه هي الحالة عندما يكون $(\cos\theta_1)^2 = \frac{(n^2-1)}{3}$. هنا n هي قرينة الانكسار.

$$\phi = 4\theta_2 - 2\theta_1$$

$$\frac{d\phi}{d\theta_1} = 4\frac{d\theta_2}{d\theta_1} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$$ قانون سنل

$$\cos\theta_1 d\theta_1 = n\cos\theta_2 d\theta_2$$

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\cos\theta_1}{n\cos\theta_2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2}{n}\cos\theta_1 = (1-\sin^2\theta_2)^{1/2} = (1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_1)^{1/2}$$

$$= (1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_1)^{1/2}$$

$$\frac{4}{n^2}\cos^2\theta_1 = 1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_1$$

$$\frac{3}{n^2}\cos^2\theta_1 = 1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$\cos^2\theta_1 = \frac{n^2-1}{3}$$

خ- باستخدام المعادلة الواردة في الجزء (ح)، احسب قيم Θ_1 من أجل كل من الضوء الأحمر والأزرق والتي تؤدي إلى قيم عظمى لـ Φ. باستخدام نتائجك في القسم (ث)، احسب القيم العظمى لـ Φ (كل طول موجي سيكون له مجموعة خاصة من قيم Θ_1 وقيم Φ_{max} المرتبطة بها).

ضوء أحمر:

$$\cos^2\theta_1 = (1.331^2-1)/3 = 0.257 \qquad \theta_1 = 59.5^o \quad \theta_2 = 40.3^o$$
$$\phi_{max} = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 42.4^o$$

ضوء أزرق \ بنفسجي:

$$\cos^2\theta_1 = (1.343^2-1)/3 = 0.2678 \qquad \theta_1 = 58.8^o \quad \theta_2 = 39.6^o$$
$$\phi_{max} = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 40.6^o$$

وبالتالي يكون العرض الزاوي لقوس قزح الملون حوالي $42.4^o - 40.6^o + 0.5^o = 2.3^o$

السبب في إضافة 0.5 درجة عائد لحقيقة أن قطر الشمس يساوي 0.5 درجة. وبالتالي عرض قوس قزح حوالي 5-6% من نصف قطره.

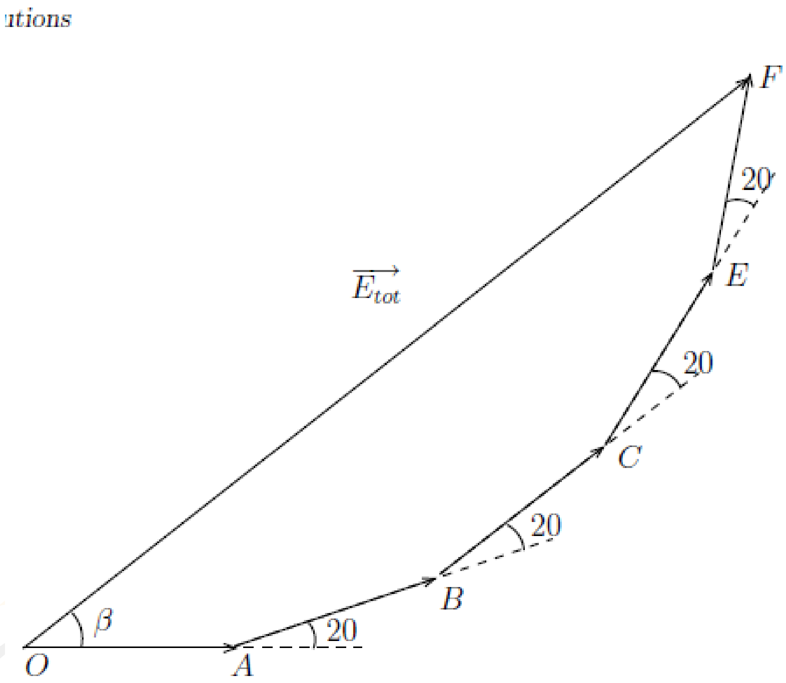


FIG. 5: Problem 10.5(a) Addition of 5 vectors

د- في عالم ما، بعيد جداً، ينزل المطر كقطرات صغيرة من الزجاج (قرينة الانكسار حوالي 1.5). الأرواح التي تعيش هناك تتحدث عن "قوس زجاج". ما هي القيمة الأعظمية لـ Φ من أجل "أقواس الزجاج"؟ قارن هذا مع "أقواس قزح" في عالمنا.

$$n = 1.5 \qquad \theta_1 = \sin^{-1}[1-(n^2-1)/3]^{1/2} = 49.8^o \quad \theta_2 = 30.6^o$$

$$\phi_{max} = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 22.8^o$$

لاحظ أن نصف قطر قوس الزجاج يساوي تقريباً نصف قطر قوس قزح! قوس الزجاج أيضاً مستقطب بشدة حيث زاوية "بروستر" (من الزجاج إلى الهواء) تساوي تقريباً 33.7 درجة، زاوية الورود عند الانعكاس في النقطة B أصغر فقط بـ 3 درجات تقريباً

تشكّل أقواس قزح: زاوية الورود 60 درجة (انظر الشكل) قريبة جداً من القيم التي وجدتها في القسم (خ). وبالتالي قيمة Φ كما هي موضحة في الشكل قريبة جداً لـ Φ_{max} التي أوجدتها في القسم (خ). الحقيقة أنّ Φ_{max} المختلفة بين اللون الأزرق والأحمر هي المفتاح الرئيسي في تشكّل قوس قزح. الشكل

الهندسي الموضح في الشكل سيلعب دوراً مركزياً في محاضرة قوس قزح في 7 ديسمبر. سيكون هناك قوس قزح، أنصحكم بأن تجلبوا المظلة معكم.

المسألة 10-5: تراكب N مذبذب

قم بحل المسألة 8-5 من كتاب

Bekefi, and Barrett. *Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation*. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 0262520478.

نرغب في القيام بتراكب الاهتزازات لعدة مذبذبات توافقية بسيطة لها نفس التردد ω ونفس السعة A. ولكن تختلف عن بعضها بتزايد ثابت للطور α، حيث:

$$E(t) = A\cos\omega t + A\cos(\omega t + \alpha) + A\cos(\omega t + 2\alpha) + A\cos(\omega t + 3\alpha) + \cdots$$

أ- باستخدام مطوار بياني إضافي أوجد E(t)، حيث يكتب بالشكل $E(t) = A_0\cos(\omega t + \phi)$.
أوجد A_0 و Φ من أجل الحالة التي يكون هناك 5 مذبذبات مع سعة A تساوي 3 وحدات و $\alpha = \pi/9$ راديان.

لتكن النقاط بعد إضافة مطوار متتابع لكل منها A وB و C و D و F . النقاط هي:

$$A(3,0),\ B(3+3\cos 20^o, 3\sin 20^o),\ C(B_x+3\cos 40^o, B_y+3\sin 40^o),$$
$$D(C_x+3\cos 60^o, C_y+3\sin 60^o) \text{ and } F(D_x+3\cos 80^o, D_y+3\sin 80^o)$$

$$F(\sim 10.138, \sim 8.506)$$

الطول

$$OF = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} \simeq 13.234 \qquad \tan\beta = F_y/F_x \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 40.0^o \quad (2\pi/9)$$

وبالتالي

$$E(t) \simeq 13.234\cos(\omega t + 2\pi/9)$$

يظهر الشكل 5 تمثيلاً بيانياً للإضافة.

ب- ادرس المضلع الذي أوجدته في الجزء (أ) وباستخدام اعتبارات هندسية صرفة أثبت أنّه من أجل N مذبذب يكون:

$$E(t) = (NA)\frac{\sin(N\alpha/2)}{N\sin(\alpha/2)}\cos\left[\omega t + \left(\frac{N-1}{2}\right)\alpha\right].$$

في الشكل 6، لتكن MO=R. نضيف N متجه، وننتهي عند Q. كل النقاط تقع على دائرة مركزها M.

يتبع من: $\triangle$ MOP: OP/2=Rsin(α/2)

يتبع من: $\triangle$ MOQ: OQ/2=Rsin($N\alpha$/2)

باستبعاد R من كلا المعادلتين، نحصل على:

$$OQ = OP\frac{\sin(\frac{1}{2}N\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

OQ متقدّم عن OP بزاوية طور QOP.

ملاحظة: Angle = زاوية

Angle QOP=angle QOT-angle POT=(Nα-α)/2.

إذا لم تلاحظ مباشرةً أنّ QOT=Nα/2، ارسم دائرةً مركزها M وتمر من O وP وQ، وبالتالي OT$\perp$MO QOT=angle OMQ/2=Nα/2.

ولذلك Q متقدّمة بزاوية طور α/2(N-1). بما أنّ |OP|=A في هذه المسألة. نجد أنّ:

$$E(t) = A\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\cos\left[\omega t + \frac{1}{2}\alpha(N-1)\right] \qquad (12)$$

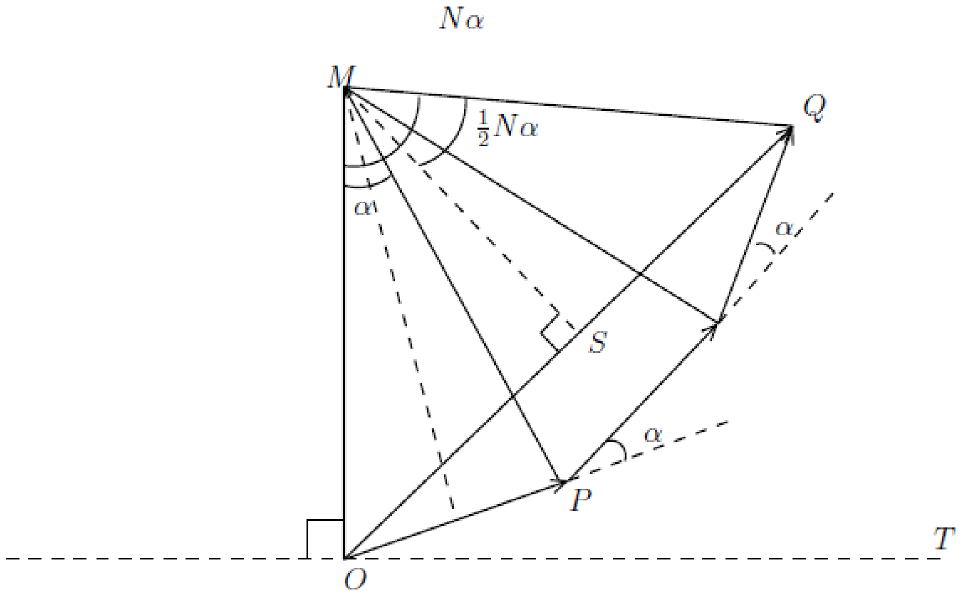


FIG. 6: Problem 10.5(b) Addition of N vectors

لنختبر الآن نتائج الجزء (أ): N = 5 و $\alpha = \pi/9$. $N(\alpha-1)/2 = 2\alpha\ (= 40^o)$.

سعة المتجه تساوي $13.234 \simeq 3\sin(2.5\pi/9)/\sin(\pi/18)$ (A=3). مناسب تماماً!

عند إضافة المتجهات، النقطة Q تتجاوز محيط الدائرة وستصل إلى O (سعة E تساوي 0)، ثمّ ستسلك مسارها القديم، نصل للقيمة العظمى عندما تكون Q على الخط OM. السعة 2R تساوي $OP/sin(\alpha/2)$ وبالتالي تعتمد على α.

ت- ارسم سعة E(t) كدالة بالنسبة لـ α.

(الحسابات في الأعلى هي أساس إيجاد الإشعاع من مصفوفة المستقبلات الهوائية وانعراج المشبك.)

لنرسم الآن سعة المتجه كدالة بالنسبة لـ α. عندما α = 0، ستكون كل المتجهات في صف واحد (جميع المتجهات داخل الطور) ونحصل على أكبر سعة ممكنة. هذه السعة يجب أن تكون أكبر بـ N مرة من قيمة A المفردة. وبالتالي ستكون قيمة السعة هي NA. بالفعل يمكن إيجاد ذلك من المعادلة رقم 12. من أجل .. ,α = 0, 2 π, 4 π, 6 π ، بسط ومقام السعة في المعادلة 12 سيكون 0. نطبق قاعدة "لوبيتال":

ملاحظة: نرمز للنهاية بـ lim

$$\lim_{\beta\to\pi}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}=\lim_{\beta\to\pi}\frac{N\cos\beta}{\cos\beta}=N$$

بالتالي نلاحظ أن الدالة تصنع سعة أعظمية لـ NA عندما .. $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi,$ .. السعة تكون 0 كلّما كان $\sin(N\alpha/2) = 0$ وبالتالي من أجل .. $\alpha = 2\pi/N, 4\pi/N, 6\pi/N,$ .. على أي حال عندما يكون في نفس اللحظة الزمنية $\sin(\alpha/2) = 0$ تكون السعة أعظمية!

بالتالي هناك قيمة أصغرية عندما $\alpha = 2n\pi/N$ (n عدد صحيح) ما عدا عندما $n = N, 2N, 3N,..$.

في الشكل 7، N=7. لاحظ أن هناك N-1=6 قيمة أصغرية بين القيمتين الأعظميتين. لقد رسمت منحني سعة $\vec{E}$. شدة الضوء متناسبة مع $(E_0)^2$ وبالتالي عند القيمة العظمى هي متناسبة مع N^2.

عند الانتقال من مقياس تداخل راديوي بخمس صحون إلى مقياس تداخل راديوي بـ 10 صحون، قوة الإشارة المستلمة تزداد وفق $10^2/5^2 = 4$ (بافتراض أنّ الصحون متشابهة).

يوضح الشكل 7 منحني سعة E(t) كدالة بالنسبة لـ α من أجل N = 7.

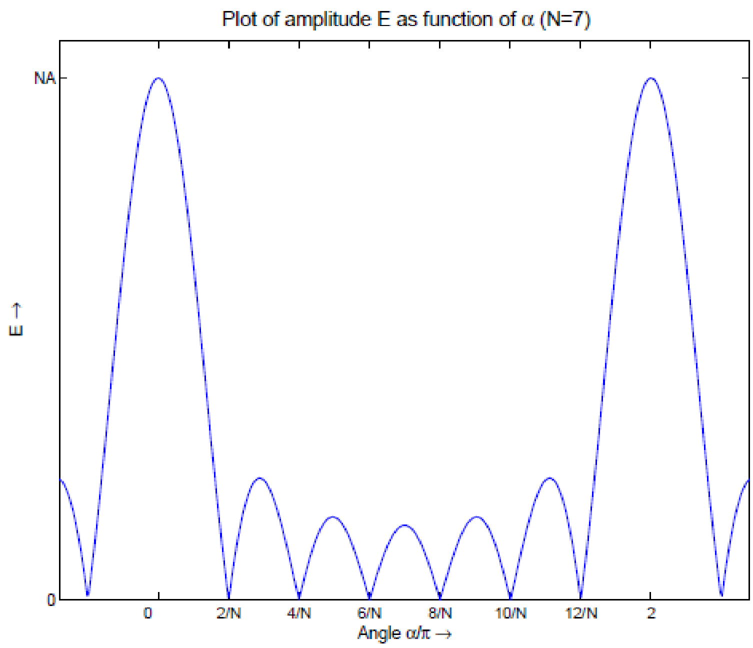


FIG. 7: Problem 10.5(c)