حل الواجب المنزلي 07

قراءات مفيدة قبل حل الواجب

كتاب "فرنش": الصفحات 274- 280، كتاب "باكفي & باريت": انظر الواجب المنزلي رقم 6 الصفحات 189-250، قراءة جديدة: الصفحات 208-251.

السؤال 7-1: الإشعاع المستقطب

اكتب الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي المرتبط به في الفراغ من أجل أمواج مستوية مرتحلة. سعة المتجه الكهربائي E_0 والتردد ω.

أ- الإشعاع مستقطب خطياً في المستوي y-z عند زاوية 45 درجة مع المحور y، ويرتحل في الاتجاه الموجب للمحور x. هناك حلان.

من أجل الزاوية $\alpha = \pi/4$ من الاتجاه +y:

$$\vec{E}_{\pi/4} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - kx)(\hat{y}+\hat{z}) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\pi/4} &= \frac{1}{\omega}k\times\vec{E} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\hat{x}\times(\hat{y}+\hat{z})\cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(\omega t - kx)(\hat{z}-\hat{y}) \end{aligned}\tag{2}$$

من أجل الزاوية $\alpha = -\pi/4$ من الاتجاه +y:

$$\vec{E}_{-\pi/4} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - kx)(\hat{y}-\hat{z}) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{-\pi/4} &= \frac{1}{\omega}k\times\vec{E} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\hat{x}\times(\hat{y}-\hat{z})\cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(\omega t - kx)(\hat{y}+\hat{z}) \end{aligned}\tag{4}$$

ب- الإشعاع مستقطب دائرياً في المستوي y-z، ويرتحل في الاتجاه x الموجب. هناك حلان.

$$\vec{E} = E_0[\cos(\omega t - kx)\hat{y} + \cos(\omega t - kx + \pi/2)\hat{z}] \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{\omega}k \times \vec{E} = \frac{E_0}{c}\hat{x} \times [\cos(\omega t - kx)\hat{y} + \cos(\omega t - kx + \pi/2)\hat{z}] \\ &= \frac{E_0}{c}[\cos(\omega t - kx)\hat{z} - \cos(\omega t - kx + \pi/2)\hat{y}] \quad (6)\end{aligned}$$

يسمى هذا استقطاباً دائرياً يسارياً عند العديد من المؤلفين، بالرغم أنه يسمى استقطاباً دائرياً يمينياً بحسب كتاب "باكفي وباريت".

$$\vec{E} = E_0[\cos(\omega t - kx)\hat{y} + \cos(\omega t - kx - \pi/2)\hat{z}] \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{\omega}k \times \vec{E} = \frac{E_0}{c}\hat{x} \times [\cos(\omega t - kx)\hat{y} + \cos(\omega t - kx - \pi/2)\hat{z}] \\ &= \frac{E_0}{c}[\cos(\omega t - kx)\hat{z} - \cos(\omega t - kx - \pi/2)\hat{y}] \quad (8)\end{aligned}$$

يسمى هذا استقطاباً دائرياً يمينياً (وفق قاعدة اليد اليمنى) عند العديد من المؤلفين، بالرغم أنه يسمى استقطاباً دائرياً يسارياً بحسب كتاب "باكفي وباريت".

السؤال 7-2: المستقطبات الخطية – قانون "مالوس" + الامتصاص

في المحاضرات، كان لديكم ثلاث مستقطِبات خطية من النوع HN30 في المغلف. إذا كان الضوء مستقطباً خطياً 100% وبشدّة I_0 يمر من مستقطِب مثالي (متراصف بشكل صحيح)، سينبثق منها ضوء مستقطباً خطياً 100% وبشدة I_0. مثل المستقطبات التي تدعى HN50.

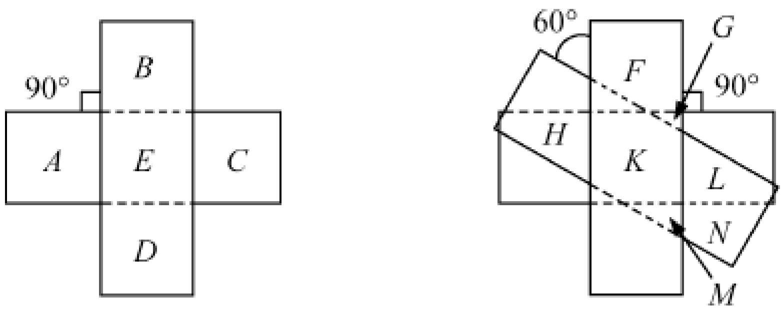
في الواقع، المستقطبات ليست مثالية، وهناك عدة أنواع منها وبدرجات مختلفة من الامتصاص. المستقطبات التي لديكم هي من النوع HN30. هذا يعني أنه إذا قمت بالتجربة كما هو موصّف في الأعلى، فقط 70% من I_0 سينبثق. وبالتالي إذا جعلنا ضوء مستقطباً خطياً 100% وبشدة I_0 يمر عبر مستقطبين (كلاهما متراصفين بشكل صحيح)، سينبثق فقط 49% من الضوء بشدة I_0.

أ- انظر من خلال أحد المستقطبات لديك إلى منبع ضوء. ثم ضع المستقطِب الثاني أمام الأول (بنفس الاتجاه). ستلاحظ أن شدة الضوء تتناقص.

ضع مستقطبين بزاوية قائمة كما هو موضح في الجزء الأيسر من الشكل. دعونا نعرّف شدة الضوء لضوء مستقطب خطياً 100% والذي يخرج من المناطق A وB و C وD كـ I_0. شدة الضوء عبر المنطقة E الآن تساوي 0.

ضع الآن المستقطِب الثالث بين المستقطبين (كما هو موضح في الجزء الأيمن من الشكل)، قم بتدوير المستقطب الثالث في نفس مستويه بينما تحافظ على الزاوية 90 درجة بين الاثنين الآخرين. ستختفي الظلمة في المنطقة E. جرب ذلك!!

ب- ما هي قيمة شدة الضوء عبر المناطق: F، G،H، K، L، M و N ؟ لاحظ الزاوية 60 درجة. خذ بالاعتبار أن المستقطِبات الذي لديك هي من النوع HN30.



سعة الحقل الكهربائي للجزء النافذ من موجة كهرومغناطيسية عبر مستقطب خطي تساوي $E_T = E\cos\theta$ حيث E_T و E هي سعات الحقل الكهربائي للموجة النافذة والواردة على التوالي، و Θ هي الزاوية بين استقطاب الموجة الواردة واتجاه الاستقطاب للمستقطِب. وبالتالي تتناقص الكثافة بمقدار $\cos^2\Theta$. بما أنّ $\langle\cos^2\theta\rangle = 1/2$، نصف الضوء غير المستقطب يمر عبر مستقطب مثالي.

بالإضافة إلى ذلك، بما أنّ المستقطبات من النوع HN30، شدة الضوء النافذ عبر مستقطب واحد تساوي $I = (0.5 \times 0.7)I_u$، حيث I_u هي شدة الضوء غير المستقطب. هذه الـ I تساوي I_0 في مسألتنا.

الشدة عبر مستقطبين هي $I = I_0(0.7\cos^2\theta_{12})$، حيث Θ_{12} هي الزاوية بين محور الاستقطاب للمستقطب الأول ومحور الاستقطاب للمستقطب الثاني. بشكل مشابه، الشدة عبر ثلاثة مستقطبات هي

$I = I_0(0.7\cos^2\theta_{12})(0.7\cos^2\theta_{23})$، حيث Θ_{23} هي الزاوية بين محور الاستقطاب للمستقطب الثاني ومحور الاستقطاب للمستقطب الثالث.

دعونا نتفحص كل حالة على حدة.

F: الضوء غير المستقطَب سيمر فقط عبر مستقطب واحد، وبالتالي $I = (0.5 \times 0.7)I_u = I_0$.

G: الضوء يمر عبر مستقطبين بزوايا قائمة، وبالتالي $I = I_0(0.7\cos^2\pi/2) = 0$.

H: مستقطبان: $\theta_{12} = \pi/6$ ، وبالتالي $I = I_0(0.7\cos^2\pi/6) = 0.525I_0$.

K: ثلاثة مستقطبات: $\theta_{12} = \pi/6$، و $\theta_{23} = \pi/3$ ، وبالتالي

$I = I_0(0.7\cos^2\pi/6)(0.7\cos^2\pi/3) \approx 0.368I_0$.

L: لاحظ أنّ هذه الحالة متطابقة فيزيائياً مع H وبالتالي $I = 0.525I_0$.

M: مستقطبان: $\theta_{12} = \pi/3$ ، وبالتالي $I = I_0(0.7\cos^2\pi/3) = 1.4I_0$.

N: الضوء يمر فقط عبر مستقطب واحد، وبالتالي $I = I_0$.

السؤال 7-3: إشعاع من شحنة متسارعة

قم بحل المسألة 4-1 من كتاب

Bekefi, and Barrett. *Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation*. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 0262520478

شحنة q ساكنة في البداية، تُعطى تسارعاً قليلاً على طول المحور z. لنفرض أن ذلك يحدث عند مركز نظام الإحداثيات في اللحظة t=0.

$\vec{a}_\perp$ هي مركبة تسارع الشحنة في الاتجاه المتعامد مع متجه الموضع للمراقب. Θ هي الزاوية بين اتجاه التسارع و متجه الموضع للمراقب.

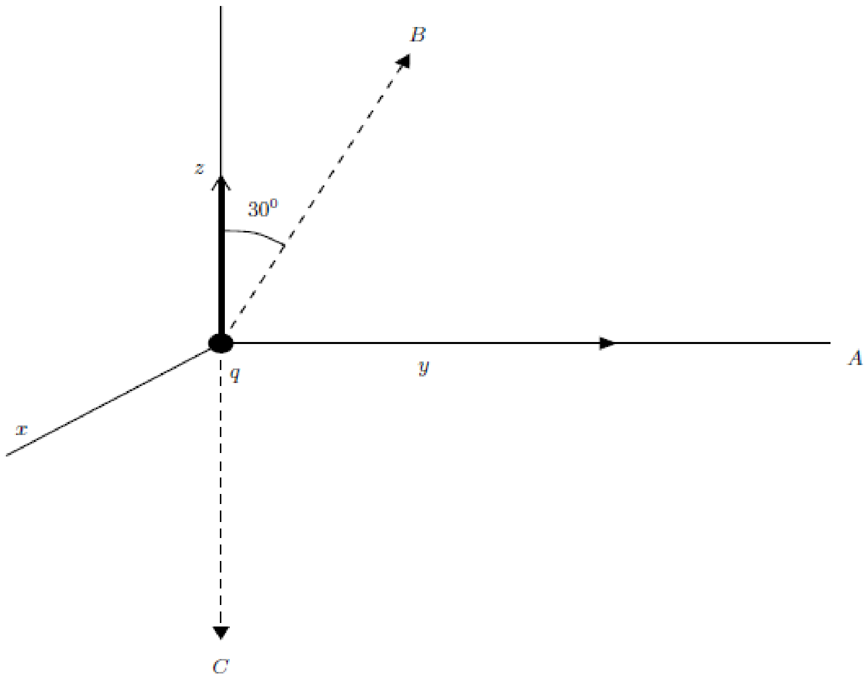


FIG. 1: Problem 7.3 Radiation from an accelerated charge

$$
\begin{aligned}
t' &= t - \frac{r}{c} \\
\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{-q\vec{a}_\perp(t')}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \;\; Vm^{-1} \\
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\hat{r}}{c} \times E(\vec{r},t) \;\; Wm^{-2} \\
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \; Wm^{-2} \\
E(\vec{r},t) &= \frac{-qa(t')\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \\
|\vec{S}(\vec{r},t)| &= \frac{q^2a^2(t')\sin^2\theta}{16\pi^2\epsilon_0 r^2c^3} \\
P(t) &= \int_0^\pi |\vec{S}(\vec{r},t)| 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{q^2a^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3} \;\; \text{واط}
\end{aligned}
$$

أ- أعطِ أوقات الوصول، القوى النسبية ووصّف الاتجاهات للحقل الكهربائي المشع الذي يُرى بواسطة ثلاثة مراقبين في المستوي y-z وبمسافة كبيرة R من مركز نظام الإحداثيات. المراقب الأول يقع على المحور y، ومراقب يقع على المحور z، والمراقب الثالث يقع على نصف قطر يصنع مع المحور z زاوية 30 درجة.

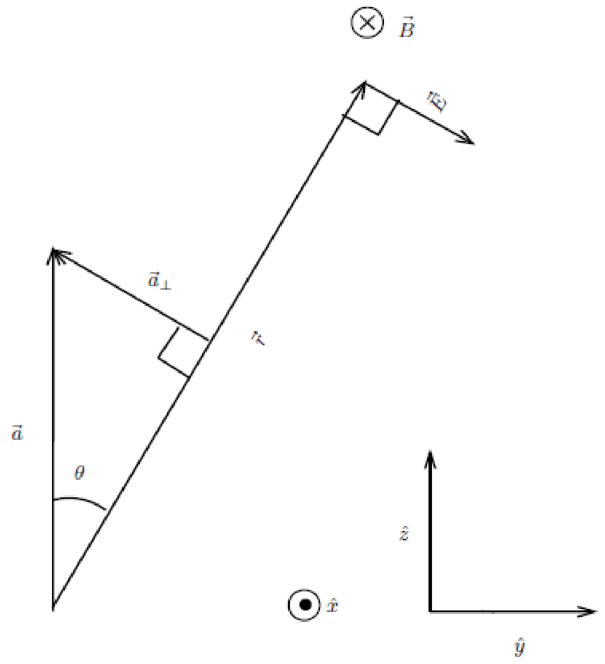


FIG. 2: Orientation of radiated electric and magnetic fields

زمن الوصول عند كل المراقبين الثلاثة A، B و C هو $t_{arrival} = R/c$. اتجاه الحقل الكهربائي عند نقطة المراقبة يكون عكس التوازي لمركبة التسارع العمودية على متجه الموضع. اتجاه الحقل المغناطيسي هو الجداء الخارجي لمتجه الموضع مع الحقل الكهربائي. الشكل 2 يوضح الاتجاهات.

المراقب A:

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= \frac{qa(t')}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta_A(\vec{r}_A\times\hat{x}) \qquad \theta_A = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{-qa(t')}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\,\hat{z} \end{aligned} \tag{9}$$

المراقب B:

$$\begin{aligned} \vec{E}_B &= \frac{qa(t')}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta_B(\vec{r}_B \times \hat{x}) \qquad \theta_B = \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\frac{qa(t')}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{z}) \end{aligned} \tag{10}$$

المراقب C:

$$\begin{aligned} \vec{E}_C &= \frac{qa(t')}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta_C(\vec{r}_C \times \hat{x}) \qquad \theta_C = 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

ب- وصّف الاتجاه والطويلة للحقول المغناطيسية المشعة المرافقة.

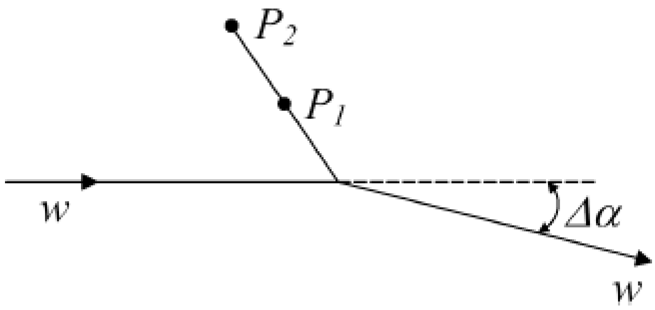
بما أنّ |E|/c = |B|، وبالتالي القوى النسبية للحقل المغناطيسي B هي نفسها القوى النسبية للحقل الكهربائي E في الجزء (أ) عند نقاط المراقبة الثلاث. زمن وصول الحقل المغناطيسي عند المراقبين الثلاثة A،B وC هو $t_{arrival} = R/c$. اتجاه الحقل المغناطيسي المستحث عند النقاط الثلاث سيكون في الاتجاه –x.

السؤال 7-4: إشعاع من شحنة متسارعة

قم بحل المسألة 4-2 من كتاب

Bekefi, and Barrett. *Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation*. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 0262520478

تتحرك شحنة نقطية +q بسرعة اتجاهية ثابتة ω على طول خط مستقيم حتى اللحظة $t=t_0$. في الفترة الزمنية القصيرة من $t = t_0$ إلى $t = t_0 + \Delta t$، قوّة عمودية على المسار تغير الاتجاه بدون تغيير سعة السرعة الاتجاهية. بعد الزمن $t= t_0 + \Delta t$ ، تتحرك الشحنة مرة أخرى وفق السرعة الاتجاهية ω على طول خط مستقيم مشكلة زاوية صغيرة $\Delta\alpha$ مع المسار الابتدائي.



أ- ما هو اتجاه الحقل الكهربائي الناشئ بسبب التسارع، عند النقطة البعيدة P_1؟

تتعرض شحنة نقطية q+ خلال الفترة الزمنية من $t= t_0$ إلى $t= t_0 + \Delta t$ لقوة عمودية على مسارها لتنقلها إلى مسار جديد بدون تغيير سرعتها $|\vec{w}|$. بما أنّ الزاوية $\Delta\alpha$ صغيرة، التسارع على طول المحور x مهمل ولا يؤثر على الإجابة. المهم فقط هو تسارع الشحنة على طول الاتجاه –y.

$$\vec{a} = \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\hat{y} = \frac{w\sin\Delta\alpha}{\Delta t}\hat{y} \simeq w\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \quad a_\perp = a_y\sin\theta = w\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\sin\theta$$

هنا $a_\perp$ هي مركبة التسارع العمودية على متجه الموضع للنقطة البعيدة p_1، وبالتالي الحقل الكهربائي عند النقطة p_1 موازٍ مضاد لـ $a_\perp$ و موجه كما هو موضح في الشكل 3.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{a_\perp}{c^2}(\hat{r}_{P1}\times\hat{z}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{v}{c^2}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\sin\theta(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) \qquad (12)$$

وبالتالي عند نقطة بعيدة p_1 سيكون الحقل الكهربائي الناتج عن التسارع في الاتجاه $(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta y)$، حيث Θ موضحة في الشكل 3.

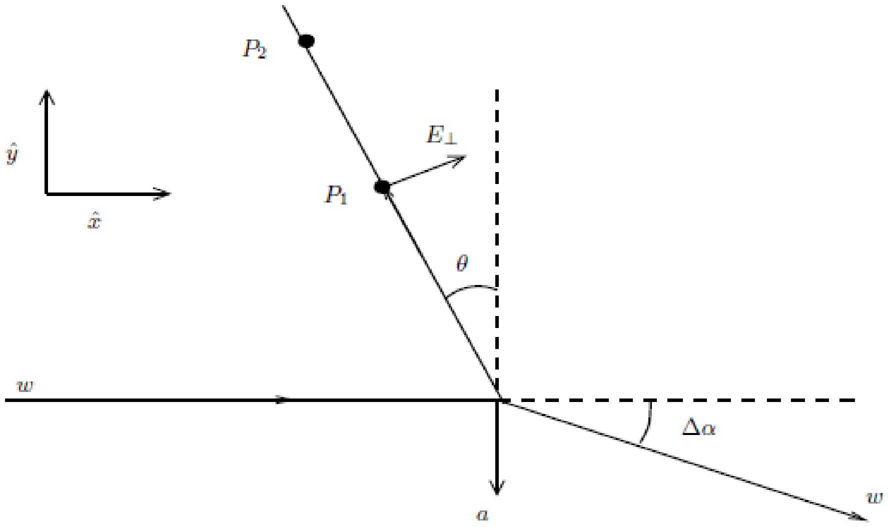


FIG. 3: Problem 7.4 Radiation from an accelerated charge

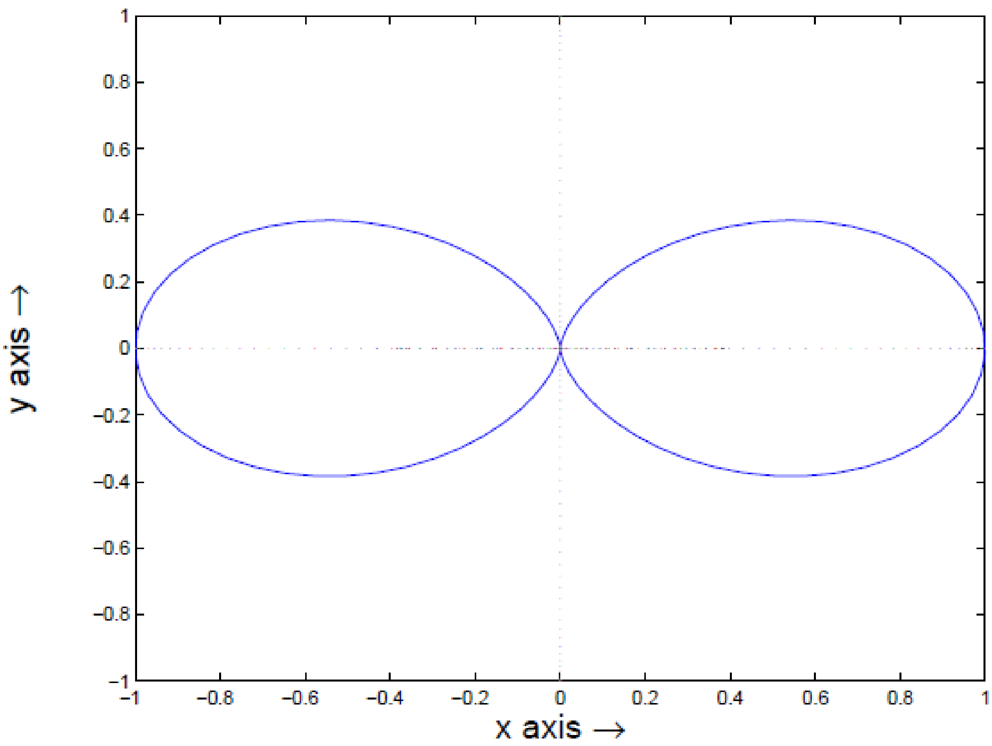


FIG. 4: Problem 7.4(b) Radial plot of intensity versus angle θ

ب- في أي اتجاه تكون شدة الإشعاع للشحنة المتسارعة أكثر شدّةً؟

شدة الإشعاع تتناسب مع $|\vec{E}_\perp|^2 \propto \sin^2\theta$. وبالتالي ستكون أكثر شدةً في المستوي x-z.

ت- أين تكون أقل شدّةً؟

الاتجاه الأقل شدةً هو على طول المحور y. يوضح الشكل 4 رسماً شعاعياً لتغيّر الشدة مع الزاوية Θ على طول الاتجاه +y.

ث- النقطة p_2 تبعد عن نقطة انعطاف المسار ضعف بعد النقطة p_1. في أي جزء ستتناقص سعة الاضطراب المغناطيسي عندما تنتقل نبضة الإشعاع من p_1 إلى p_2؟

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{r} \times \frac{\vec{E}(\vec{r},t)}{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \simeq \frac{E_\perp}{c} \propto \frac{1}{r} \tag{13}$$

وبالتالي تتناقص السعة وفق المعامل 2.

ج- ما هي قيمة الطاقة الكلية المشّعة؟

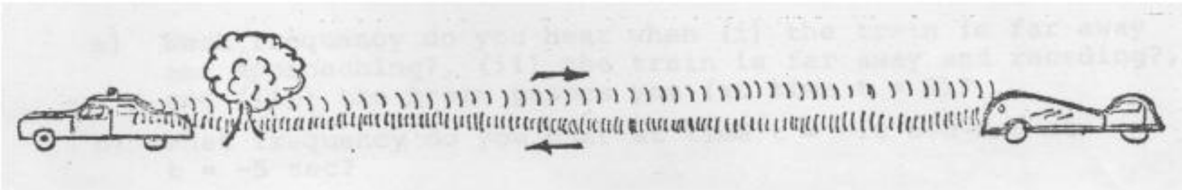
ارسم مخططات دقيقة للإجابات الخاصة بالأجزاء أ، ب، ت.

$$\Delta E_{radiated} = P\Delta t = \frac{q^2 a^2 \Delta t}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 w^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)^2 \Delta t \tag{14}$$

السؤال 7-5: التحقق من السرعة بواسطة الرادار

شعاع رادار ($\lambda = 3$ سم) ينعكس عن سيارة كما هو موضح في الشكل (انعكاس مواجه). مرسل الرادار غير متحرك. الشعاع المنعكس يُستقبل ثانيةً من قبل الشرطة، التردد f' لهذه الإشارة المنعكسة يقاس بمستقبل ثابت على سيارة الشرطة. وبذلك يمكن حساب السرعة الاتجاهية للسيارة v. كل ذلك يحدث في "صندوق أسود" بأقل من أجزاء صغيرة من الثانية.

شاشة عرض رقمية تظهر لضابط الشرطة سرعتك بعد تحويلها إلى ميل/ساعة.



$$f'(\text{الذي تستقبله السيارة المتحركة}) \simeq f(1+\beta) \qquad (15)$$

حيث $\beta = v/c$ موجبة، عندما تقترب السيارة.

$$f''(\text{الذي تستقبله سيارة الشرطة}) \simeq f'(1+\beta) \simeq f(1+\beta)^2 \simeq f(1+2\beta)$$

أ- ما هي قيمة تردد مرسل الرادار؟

$$\lambda = c/f \quad \Rightarrow \quad f = 3\times 10^8/3\times 10^{-2} = 10^{10} \text{ هرتز} \qquad (16)$$

ب- أعطي معادلة تبين من خلالها العلاقة بين f و f' و v. (تلميح: احسب أولاً التردد الذي "تراه" السيارة، ثم أرسل هذه الإشارة إلى الشرطة.)

انظر لما سبق.

السؤال 7-6: لا تستطيع سماع الصافرة؟

يسافر قطار على طول مسار مستقيم بسرعة 20 م/ثانية (تقريباً 45 ميل/ساعة). ينفخ صافرته باستمرار (هرتز 1000 = f). أنت كمراقب تقف على بعد 100 متر من المسار (انظر الشكل). نعرف الزمن t=0 أنه اللحظة التي يكون فيها القطار أقرب ما يمكن إليك.

أ- ما هو التردد الذي تسمعه عندما (1) يكون القطار بعيداً عنك ويقترب؟ (2) القطار بعيد عنك ويبتعد (3) يمر القطار من جنبك (عند t=0)؟

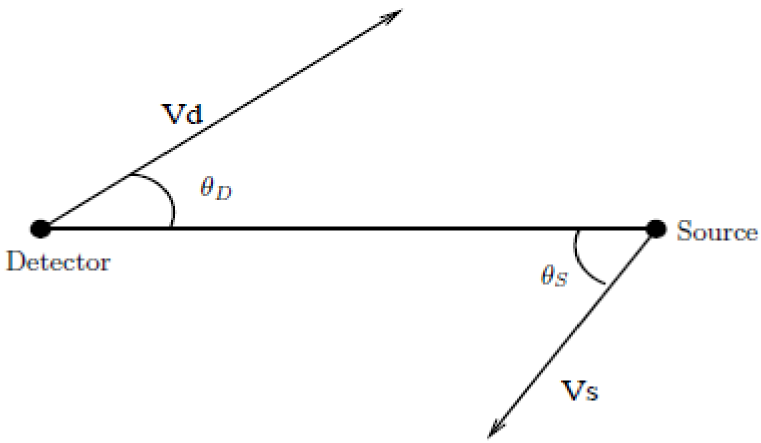


FIG. 5: Problem 7.5 General Doppler Effect

عبارة "دوبلر" الأساسية للصوت هي:

$$f' = \left(\frac{v + v_D \cos\theta_D}{v - v_S \cos\theta_S}\right) f$$

حيث v و v_s و v_D هي سرعة الصوت وسرعة المصدر و سرعة الكاشف بالنسبة إلى الوسط ، على التوالي. الزوايا Θ_D و Θ_S موضحة في الشكل 5.

بما أنّ $v_S/v \sim 20/340 \sim 0.06 \ll 1$ و $v_D = 0$، يمكن تبسيط عبارة "دوبلر" كالتالي:

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_S \cos\theta_S}\right) f \approx \left(1 + \frac{v_S}{v}\cos\theta_S\right) f$$

عندما يمر القطار من أمام الكاشف، ستتغير الزاوية Θ_S من 0 إلى π.

- بعيد ويقترب: Θ تقريباً 0، وبالتالي $f' \approx (1 + 0.059)f$

$$f'_{\text{بعيد ويقترب}} = 1059 \text{ هرتز} \qquad (17)$$

- بعيد ويبتعد: Θ تقريباً π، وبالتالي $f' \approx (1 - 0.059)f$

$$f'_{\text{بعيد ويبتعد}} = (1 - 0.059)f = 941 \text{ هرتز} \qquad (18)$$

- أقرب ما يمكن من الكاشف $\Theta = \pi/2$

$$f'_{t=0} = (1 - 0.059\cos\pi/2)f = f = 1000 \text{ هرتز} \quad (\cos\theta = 0\ !) \qquad (19)$$

ب- ما هي قيمة التردد الذي تسمعه عند اللحظة: ثانية t = -10، وعند اللحظة: ثانية t = -5 ؟

عند اللحظة t = -10، $\cos\theta = 200/100\sqrt{5} = 0.89$

$$f'_{t=-10} = (1 + 0.059 \times 0.89)f = 1053 \text{ هرتز} \qquad (20)$$

عند اللحظة t = -5، $\cos\theta = 100/100\sqrt{2} = 0.71$

$$f'_{t=-5} = (1 + 0.059 \times 0.71)f = 1042 \text{ هرتز} \qquad (21)$$

ت- ارسم منحني التردد الذي تسمعه مقابل الزمن.

يوضح الشكل 6 منحني التردد مقابل الزمن لصافرة القطار.

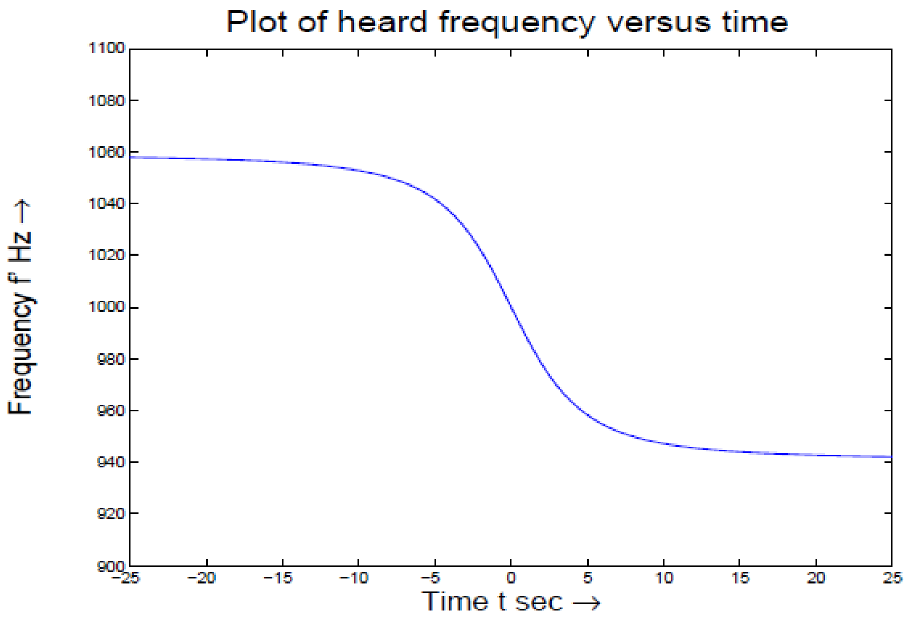


FIG. 6: Problem 7.6 Plot of heard frequency versus time

المسألة 7-7: كوننا المتوسّع – مبسّط

يوضح الشكل في الأسفل توسع بالون بشكل مشابه للكون. تم تمثيل كامل الفضاء بواسطة سطح البالون الكروي، وعناقيد المجرات تم تمثيلها ببقع على هذا السطح، نصف قطر البالون متطابق مع R(t) نصف قطر الكون.

عندما يتوسع البالون، يبقى للنقاط تباعد زاوي ثابت (Θ) من بعضها. لنفترض أن البالون يتوسع بمعدل ثابت.

أ- برهن أنّ:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)s \qquad (1)$$

حيث s هي المسافة الفاصلة بين بقعتين على السطح، و $(\Delta s/\Delta t)$ هي سرعة ابتعاد بقعة عن الأخرى.

لاحظ أن المعادلة (1) مكافئة لقانون "هابل":

$$v = Hr \qquad (2)$$

وبالتالي: $s = R\theta$

$$\theta = s/R = \frac{s+\Delta s}{R+\Delta R} \qquad (22)$$

نقسم على Δt:

$$s\left(\frac{\Delta R}{\Delta t}\right) = R\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left[\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right] s \qquad (23)$$

ب- ما هي قيمة H بدلالة الرموز المستخدمة في المعادلة (1)؟ تحقق من أنّ إجابتك صحيحة بشكل بعدي، بشكل عام، يقاس H بـ (كم/ثانية)/ميغا بارسك.

حسب قانون "هابل": v = Hd، حيث v هنا هي سرعة التباعد للمجرة، و d هي المسافة بيننا وبين تلك المجرة. من أجل كون البالون ds/dt = v و s=d. وبالتالي $H = (1/R)(\Delta R/\Delta t)$. وحدة قياس H هي 1/زمن. $\Delta R/\Delta t$ هو معدل التوسع للبالون.

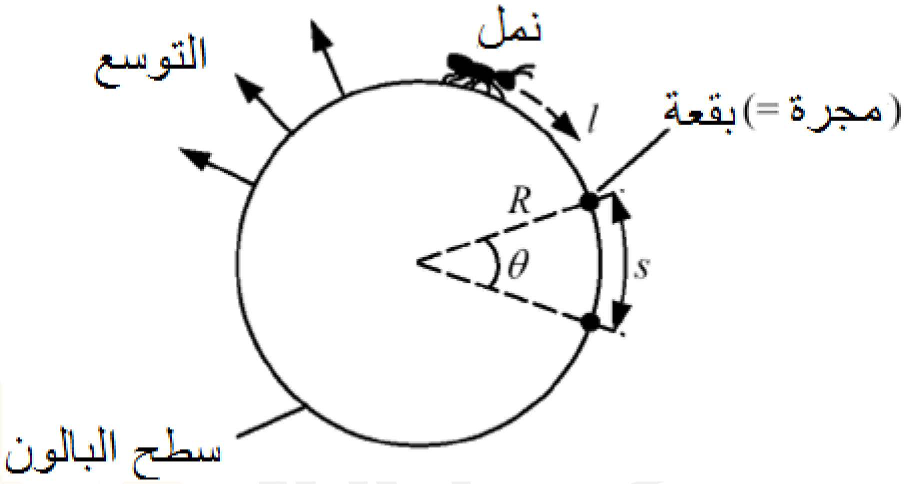
يمكن تمثيل فوتونات الضوء من المجرات البعيدة كـ "نمل" يزحف على سطح البالون بسرعة l.

ت- وضح أنه من أجل التوسع الكوني المنتظم [$(\Delta R/\Delta t)$ = ثابت]، هناك مسافة (s) بعدها لن يستطيع النمل منها الوصول إلى مجرتنا (هذه المسافة تدعى الأفق)!

إذا كان $\Delta s/\Delta t = l$، سرعة الانسحاب عند الأفق تساوي السرعة الاتجاهية الأعظمية للنمل. من أجل الثابت $\Delta R/\Delta t$، هذا يحدث عند مسافة:

$$s_{max} = Rl\left(\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^{-1} \qquad (24)$$

لاحظ أنّ R هي نصف قطر الكون (هنا هي نصف قطر البالون.)



لننتقل الآن إلى الطريقة التي كنّا ننظر فيها إلى عالمنا منذ عدة سنوات، قبل اكتشاف "الطاقة المظلمة". الطاقة المظلمة مسؤولة عن حقيقة أنّ توسّع الكون -بحسب الاعتقاد الحالي- متسارع وليس متباطئ. هذه الطاقة المظلمة الخفية تعتبر من أسخن المواضيع في الفيزياء حالياً. فيما يأتي، سنتظاهر أنه لا يوجد طاقة مظلمة.

ليكن لدينا مجال كروي غازي متوسع كثافته الكتليّة المنتظمة ρ وكتلته الكلية M ونصف القطر R(t). ستتحرك جزيئة غاز عند سطح المجال الكروي شعاعياً للخارج بسرعة اتجاهية v وبالتالي:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} + \text{ثابت} \qquad (3)$$

هنا $v = \Delta R/\Delta t$ هي السرعة الشعاعية.

يجب أن تكون هذه المعادلة مألوفة من المساق 8.01. إذا كان الثابت موجباً فالتوسع لن يتوقف أبداً (طاقة حركية كبيرة جداً). وإذا كان الثابت سالباً سيتوقف التوسع في النهاية، ثم سينكمش على نفسه نتيجة قوى جاذبة.

ث- وضح أنه يمكن كتابة المعادلة (3) بالصيغة التالية:

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2(\text{ثابت})}{R^2} \qquad (4)$$

بضرب المعادلة رقم (3) من المسألة 7-7 بـ $2/R^2$ وباعتبار $V = \Delta R/\Delta t$ و $\rho = 3M/4\pi R^3$. بالتالي:

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2(\text{ثابت})}{R^2} \qquad (25)$$

فيما يلي سنستخدم الرمز السفلي (0) عندما نشير إلى الوقت الحالي.

فيما يلي، سنفترض أنّ $H_0 = 70 \frac{\text{كم/ثانية}}{\text{ميغا بارسك}}$ و $G = 6.7 \times 10^{-11}$ (وحدة قياسات النظام الدولي).

ج- ما هي أقل كثافة مطلوبة لكوننا الآن (ρ_0) لجعله مغلق؟

من أجل كون مسطح، الثابت يساوي 0، وبالتالي

عوّض ρ في المعادلة (4) بـ $\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. M هنا هي الكتلة الكلية للكون.

$$H^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \left(\frac{3}{8\pi G}\right) H_0^2 \sim 10^{-26}\ \text{كغ/م}^3 \sim 10^{-29}\ \text{غرام/سم}^3$$

$$(26) \qquad \text{من أجل} \quad H_0 = 70 \frac{\text{كم/ثانية}}{\text{ميغا بارسك}}$$

ح- وضّح أنه في حالة الكون المسطح، نصف قطر الكون R(t) متناسب مع $t^{2/3}$.

يستنتج من ذلك على الفور أنّ $H = \frac{2}{3t}$ (وضح ذلك) وبالتالي عمر الكون الآن:

$t_0 = \frac{2}{3H_0} \sim 9.3 \times 10^9$ سنة

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^2 = \frac{2MG}{R^3} + \frac{2(\text{ثابت})}{R^2}$$

كما ورد سابقاً الثابت يساوي 0 ولذلك $\Delta R/\Delta t = \sqrt{2MG/R}$ و $\Delta t = \Delta R\sqrt{R/2MG}$. وبالتكامل نحصل على:

$$t = \frac{2R^{3/2}}{3\sqrt{2MG}} \quad \Rightarrow \quad R(t) \propto t^{2/3} \tag{27}$$

الآن، بما أنّ $H = \Delta R/(R\Delta t)$ و $R \propto t^{2/3}$، يمكننا إيجاد عبارة لـ H بدلالة t. ليكن $R = ct^{2/3}$، وبالتالي:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2}{3}ct^{-1/3} \quad H = \frac{1}{ct^{2/3}}\left(\frac{2}{3}ct^{-1/3}\right) = \frac{2}{3t} \tag{28}$$

عمر الكون الآن مساوي لـ :

$t_0 = 2/3H_0 \sim 9.3 \times 10^9$ سنة

خ- المعادلة المعدّلة رقم (4) تربط $H^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\right)^2$ مع R. برهن أنّ ثابت "هابل" لا بد أنه كان أكبر في الماضي.

بدمج المعادلتين 27 و 28 يظهر أنّ H متناسب عكسياً مع $R^{3/2}$ (لا يوجد اعتماد على الزمن!). بما أنّ R كان أصغر في الماضي، H يجب أن يكون أكبر.

د- هل يمكن أن يصبح H سالباً؟ ما نتيجة ذلك على المجرات ذات الانزياح الأحمر؟

يصبح H سالباً إذا أصبح $\Delta R/\Delta t$ سالباً. يمكن أن يحدث هذا من أجل الكون المغلق. وهذا يعني أن الكون ينكمش، وبالتالي المجرات ذات الانزياح الأحمر و QSO's ستصبح مجرات ذات انزياح أزرق.